Teorema do Confronto

Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente $x=a$, e se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

Então $\lim_{x\to a} h(x) = L$

Demonstração

Dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ sempre que:

$|f(x) - L| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - L| < \varepsilon$

$-\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon$

Existe $\delta_2 > 0$ tal que, $0 < |x-a| < \delta_2$ sempre que:

$|g(x) - L| < \varepsilon$

$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$

$-\varepsilon + L < g(x) < \varepsilon + L$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ENTÃO $0 < |x-a| < \delta$ SEMPRE QUE

$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$

$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$

Logo $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

$-\varepsilon < h(x) - L + \varepsilon$

$|h(x) - L| < \varepsilon$

Ou seja, $\lim_{x\to a} h(x) = L$ ■

Calcule, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$

sen $\to -1 \leq \text{sen} \leq 1$

$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1 \quad [\times \sqrt{x^3 + x^2}]$

$-\sqrt{x^3 - x^2} \leq \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \sqrt{x^3 - x^2} \leq \sqrt{x^3 - x^2}$

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{0^3 - 0^2} = 0 = \lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \sqrt{x^3 - x^2}$

Limites Laterais

Seja f uma função definida em um intervalo (a, c). Dizemos que L é o limite à DIREITA de f quando tende à a.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Se $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$a < x < a + \delta$ sempre que

$|f(x) - L| < \varepsilon$

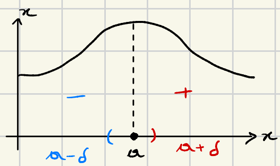
Se f é uma função em um intervalo (d, a). Dizemos que L é o limite à ESQUERDA de f quando x tende à a.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$a - \delta < x < a$ sempre que

$|f(x) - L| < \varepsilon$



Seja $f(x)$, calcule os limites

$$f(x) \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to -1} f(x) = 1/x = \frac{1}{-1} = -1$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{x} \leq x \to 1 \leq 2 - x = 1$

$2 - 1 = 1$

$\frac{1}{1} = 1$

c) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = x^2 = 0$

d) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

e) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

0

$\frac{1}{x} \leq x \to 0 \leq x^2$

$-\infty$

$-\infty \neq 0$

Logo, $\lim_{x \to 0} f(0) = \nexists$