CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL
LISTA 1

1) CALCULE OS LIMITES A SEGUIR:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$

→ SOMA DE CUBOS $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

↳ SOMA DE QUADRADOS $(a-b)(a+b)$

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x1+1^2) = (x+1)(x^2-x+1)$

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(x-1)\cancel{(x+1)}}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x^2-x+1)}{(x-1)} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)-1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

b) $\lim_{h \to 1} \frac{\sqrt{h}-1}{h-1}$ → RACIONALIZAR

$$\lim_{h \to 1} \frac{\sqrt{h}-1}{h-1} \cdot \frac{\sqrt{h}+1}{\sqrt{h}+1}$$

$$\lim_{h \to 1} \frac{\cancel{h-1}}{\cancel{(h-1)}(\sqrt{h}+1)} = \frac{1}{\sqrt{h}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$ → FATORAR

$x^2+3x-10 =$ $a.b=-10$ e $a+b=3$

$= (x+5)(x-2)$

↳ ACHAR DOIS Nº QUE MULTIPLICADOS DÃO A CONSTANTE -10, E ENCONTRAR DOIS NUMEROS QUE A SOMA DÊEM O TERMO DO MEIO 3.

$3x^2-5x-2 \iff ax^2+bx-c$

↳ VOU FOCAR EM ENCONTRAR b E c

COMO $a \neq 0$, ENTÃO

$p = a \cdot c = -6$

$q =$ QUE SOMADOS DÊEM $c \Rightarrow +1-6=-5$

Então, $3x^2+5x-2 = 3x^2+x-6x-2$

$(3x^2+x)(-6x-2)$

$x(3x+1)-2(3x+1)$ → Juntar termos em comum

$(3x+1)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{(3x+1)\cancel{(x-2)}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+5)}{(3x+1)} = \frac{2+5}{3(2)+1} = \frac{7}{7} = 1$$

d) $\lim_{t\to -2} \dfrac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t+3)}$ → Possível fatorar

t^3+4t^2+4t

$= t(t^2+4t+4) \Rightarrow t^2+4t+4$

$= (t+2)(t+2)$

$$\lim_{t\to -2} \frac{t[(t+2)(t+2)]}{(t+2)(t+3)} = t \lim_{x\to -2} \frac{(t+2)\cancel{(t+2)}}{\cancel{(t+2)}(t+3)} \Rightarrow$$

$$t \lim_{t\to -2} \frac{(t+2)}{(t+3)} = -2 \quad \frac{(-2)+2}{-2+3} = \frac{-2 \cdot 0}{1} = 0$$

e) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} =$

$x^2-1 \to (x-1)(x+1)$

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ ($3 \to 1+2$, $2 \to 1 \cdot 2$)

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

f) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2+(1-a)x-a}{x-a}$ → Fatorar $x^2+(1-a)x-a$

Quero o numerador como, $(x-a) \cdot k$

Como é quadrático, $(x-a).(x+b)$

$= x^2 + xb - ax - ab$ $\rightarrow -ab = -a = -a.1 = -a$

$\rightarrow (b-a)x$

Logo, $b=1$

$(x-a)(x+1)$

$$\lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+1)}{\cancel{(x-a)}}$$

$$\lim_{x\to a} x+1 = a+1$$

g) $\lim_{t\to \frac{5}{2}} \frac{2t^2-3t-5}{2t-5}$ $\rightarrow$ Fatorar $2t^2-3t-5$

Quero dois números tais que

$a.b=-10$ e $a+b=-3$

$\rightarrow 2(-5)=-10$ $\rightarrow 2+(-5)=-3$

$2t^2-5t+2t-5$

$(2t^2-5t)(2t-5) \Rightarrow t(2t-5)1(2t-5)$

$= (2t-5)(t+1)$

$$\lim_{t\to \frac{5}{2}} \frac{\cancel{(2t-5)}(t+1)}{\cancel{2t-5}}$$

$$\lim_{t\to \frac{5}{2}} t+1 = \frac{5}{2}\ 1 = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-5x^3+2}{7x^3+3} = \left.\frac{x^3(-5+\frac{2}{x^3})}{x^3(7+\frac{3}{x^3})}\right\}$ $\frac{2}{x^3}$ e $\frac{3}{x^3}=0$, pois $\frac{a}{\pm\infty}=0$

$$= \frac{\cancel{x^3}(-5+0)}{\cancel{x^3}(7+0)} \Rightarrow \frac{-5}{7}$$

i) $\lim_{t\to +\infty} \frac{t^2-2t+3}{2t^2+5t-3} = \frac{\cancel{t^2}(1-\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2})}{\cancel{t^2}(2+\frac{5}{t}-\frac{3}{t^2})}$

$$\Rightarrow \frac{1-0+0}{2+0-0} = \frac{1}{2}$$

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{x}$ $[\div x]$

$$= \frac{\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = x+3+\frac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow +\infty+3+0$$

$\rightarrow \frac{a}{\pm\infty}=0$

k) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ → PARA QUALQUER REAL x, VALE $\sqrt{x^2} = |x|$.

COMO $x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x$.

SENDO ASSIM, $\sqrt{x^2+1}$ PODE SER REESCRITO COMO

$\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \Rightarrow -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1} = \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} \Rightarrow (-1)\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = -\frac{1}{1} = -1$$

l) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{1}{1} = 1$

↳ MESMO RESULTADO QUE A QUESTÃO k, PORÉM POSITIVO.

COMO $x \to +\infty$, $|x| = x$.

m) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty$

↳ $(x-2)(x+2)$

↳ $x-2>0 \Rightarrow (x-2)(x+2)>0$

n) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$

↳ $(x-2)(x+2)$

↳ $x-2<0 \Rightarrow (x-2)(x+2)<0$

o) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ → $1-\cos x = 2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\frac{\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\left(\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right)^2$$

$\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, ENTÃO $\Rightarrow 2\cdot\left(1\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

p) $\lim_{x \to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2}$ → $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$1-2\cos x + (2\cos^2 x - 1) = 2\cos^2 x - 2\cos x \Rightarrow 2\cos x(\cos x - 1)$

$\Rightarrow -2\cos x(1-\cos x)$

$$\frac{-2\cos x(1-\cos x)}{x^2} = -2\cos x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}$$ → PELA QUESTÃO o, SABE-SE QUE $\frac{1}{2}$

LOGO, $-2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

q) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(10x)}{\operatorname{sen}(7x)} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(10x)}{10x} \cdot \frac{7x}{\operatorname{sen}(7x)} \cdot \frac{10}{7}$

$\frac{\operatorname{sen}(10x)}{10x} = 1$ e $\frac{7x}{\operatorname{sen}(7x)} = 1$

$\Rightarrow 1 \cdot \frac{10}{7} \cdot 1 = \frac{10}{7}$

r) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{10}{x}\right)^x = e$

↳ DADO O LIMITE FUNDAMENTAL

s) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

t) $\lim_{x\to 2} \frac{5^x-25}{x-2}$ $\quad y = x-2$ $\quad y \to 0 = 2-2$

PARA x

$y = x-2$

$y+2 = x$

$\lim_{y\to 0} \frac{5^{y+2}-25}{y} = \frac{5^{y+2}-5^2}{y} = \frac{5^y \cdot 5^2 - 5^2}{y} \to 5^2(5^y-1)$

$5^2 \lim_{y\to 0} \frac{5^y-1}{y} = 25 \ln 5$

↳ DADO O LIMITE FUNDAMENTAL

$\frac{a^x-1}{x} = \ln a, x \to 0$

u) $\lim_{x\to 2} \frac{10^{x-2}-1}{x-2}$ $\quad y = x-2$ $\quad y \to 0 = 2-2$

$\lim_{y\to} \frac{10^y-1}{y} = \ln 10$

v) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{\text{sen}(5(x-1))}$ $\quad y = x-1$

$y \to 0 = 1-1$

$\lim_{y\to 0} \dfrac{3^{y/4}-1}{\text{sen}(5y)}$ → REESCREVENDO EM TERMOS MENORES

$\lim_{y\to 0} \dfrac{3^{y/4}-1}{y/4} \cdot \dfrac{y/4}{5y} \cdot \dfrac{5y}{\text{sen}(5y)}$ } NÃO ESTOU CERTO DESTA TRANFORMAÇÃO

$\Rightarrow \ln 3 \cdot \dfrac{1}{20} \cdot 1 = \dfrac{\ln 3}{20}$

2) SEJA $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$.

É POSSÍVEL SIMPLIFICARMOS A FUNÇÃO

$x^2-25 = x^2-5^2 = (x-5)(x+5)$

$f(x) = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}$, POSSÍVEL SIMPLIFICAR PARA

$f(x) = x+5, \ x \neq 5$

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = x+5 = 5$

→ É POSSÍVEL POIS 5^+ ESTÁ PARA A DIREITA

b) $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 5+5 = 10$

c) $\lim_{x\to -5^-} f(x) = -5+5 = 0$

d) $\lim_{x\to 5} f(x) = 5+5 = 10$

e) $\lim_{x\to -5} f(x) = -5+5 = 0$

3) CALCULE OS LIMITES A SEGUIR

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-2)}} = x-2 = 0$

b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ → EXPANDIR COM BINÔMIO DE NEWTON

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3$

$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3x^2\cancel{h} + 3x\cancel{h}^2 + \cancel{h}^3}{\cancel{h}} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$\lim_{h\to 0} 3x^2 + 3x(0) + 0^2 = 3x^2$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \longrightarrow \tan x = \dfrac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x}$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$\hookrightarrow \cos(0) = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$ ↪ NUMERADOR E DENOMINADOR NO MESMO GRAU. TIRAR A RAZÃO DOS COEFICIENTES

$$\frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2} \left[\cdot/.4\right] = \frac{5 - \overbrace{\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}^{\text{ZERO}}}{4 + \underbrace{\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}_{\text{ZERO}}} = \frac{5}{4}$$

e) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, QUANDO $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} = \frac{x - x - h}{x(x+h)}$$

$$\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = \frac{-1}{x^2}$$

4) DADA A FUNÇÃO:

$$f(x) \begin{cases} x+2, & \text{se } x < 0 \\ 1-x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - x = 1$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = x + 2 = 2$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 - x = 1$

d) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1 - 2 = -1$

e) $\frac{f(q) - f(p)}{q - p}$, PARA $p = 5$ e $q = -5$

$$\frac{(1-x) - (x+2)}{-5 + (-5)} = \frac{1 - \cancel{x} - \cancel{x} - 2}{-10} = -\frac{1}{10}$$