As notas foram tiradas do livro → Cálculo A - Flemming

Fechamento → Se a e $b \in \mathbb{R}$ existe um, e somente um número real denotado por $a+b$, chamado soma.

Comutatividade → Se a e $b \in \mathbb{R}$, então $a+b=b+a$ e $a.b=b.a$.

Associatividade → Se a, b e $c \in \mathbb{R}$, então:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

↳ Mesmo para a multiplicação!

Distributividade → Se a, b e $c \in \mathbb{R}$, então:

$$a.(b+c)=ab+ac$$

Existência de números simétricos → Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a+(-a)=0$

Desigualdades

Para dizer que um número é menor que o outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem

Axioma da ordem

I) Se $a \in \mathbb{R}$, uma das 3 alternativas ocorre:

- $a=0$
- $a>0$ → Positivo
- $a<0$ → Negativo

II) A soma de dois números positivos é positiva

III) O produto de dois números positivos é positivo

DEFINIÇÃO DE Nº REAL NEGATIVO

↳ O número real a é negativo se, e somente se, $-a$ é positivo.

DESIGUALDADES

Expressões que envolvem os símbolos:

$>, \geqslant, <, \leqslant$

VALOR ABSOLUTO

O valor absoluto de a, denotado por $|a|$, é definido como:

- $|a| = a$ se $a \geqslant 0$
- $|a| = -a$ se $a < 0$

Interpretação Geométrica

Geometricamente o valor absoluto de a, também é chamado de módulo de a, e representa a distância entre a e 0.

Então, escreve-se $|a| = \sqrt{a^2}$

↳ $\sqrt[2]{a^2} = a$

I) $|x| < a \iff -a < x < a$, ONDE $a > 0$

II) $|x| > a \iff x > a$ ou $x < -a$, ONDE $a > 0$

↳ $|-12| > 6$

↳ $|-12| = 12$

III) Se a e $b \in \mathbb{R}$, ENTÃO $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ → $\sqrt{(ab)^2} \iff \sqrt{a^2 \cdot b^2} \iff \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \iff |a| \cdot |b| \iff |a \cdot b| \iff \sqrt{(ab)^2}$

IV) Se a e $b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, ENTÃO $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

V) Se a e $b \in \mathbb{R}$, ENTÃO $|a + b| \leq |a| + |b|$ → DESIGUALDADE TRIANGULAR

VI) Se a e $b \in \mathbb{R}$, $|a - b| \leq |a| + |b|$

VII) Se a e $b \in \mathbb{R}$, ENTÃO $|a| - |b| \leq |a - b|$

EXEMPLOS

Resolvendo desigualdades

I) $3+7x<8x+9$

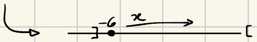
$7x<8x+9-3$ [-3]

$7x<8x+6$

$7x-8x<+6$ [-8x]

$-1x<6$ → $-x>6$ [÷-1] → O SINAL É INVERTIDO TAMBÉM

$x>-6$



$(-6,\infty+)$ ou $\{x \mid x>-6\}$

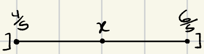
II) $7<5x+3\le 9$

↳ Queremos isolar o x

$7-3<5x+3-3\le 9-3$

$4<5x\le 6$ [÷5]

$\frac{4}{5}<x\le\frac{6}{5}$



$(\frac{4}{5},\frac{6}{5}]$ ou $\{x \mid x>\frac{4}{5}$ ou $x\le\frac{6}{5}\}$

III) $\frac{x}{x+7}<5,\quad x\neq 7$

$\frac{x}{x+7}<5$ [x(x+7)]

$x<5(x+7)$ CASO-1

$x<5x+35$ $\quad x+7>0$ ou $x>-7$ ↳ $(x<-7)+7<0$

$x<5x+35$ [-5x] ↳ $\frac{x}{x+7}$ → $x+7\neq 0$

$x-5x<35$

$-4x<35$ [-4]

$x>-\frac{35}{4}$

Resultado Caso 1

$\{x \mid x>-7\}\cap\{x \mid x<-\frac{35}{4}\}$

$\Rightarrow (-7,\infty+)$

↳ O caso mais restritivo tem precedência. $(-7>-\frac{35}{4})$

$x>5(x+7)$ CASO-2 → x não tem sinal, se considerarmos que é $x<0$, a desigualdade vai ser invertida.

$x>5x+35$ [-5x] $\quad x+7<0$ ou $x<-7$

$x-5x>5x+35-5x$

$-4x>35$ [x-4x]

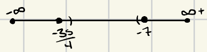
$x<-\frac{35}{4}$

Resultado Caso 2

$x<-\frac{35}{4}$ tem precedência sobre $x<-7$, pois é mais restritivo. → $(-\infty,-\frac{35}{4})$

Conjunto Solução

- $(-7, \infty+)$ e $(-\infty, -\frac{35}{4})$ $\Big\}$ $(-\infty, -\frac{35}{4}) \cup (-7, \infty+) \iff x \notin [-\frac{35}{4}, -7]$

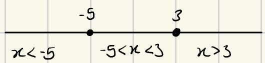


$(x+5)(x-3) > 0$

↳ Encontrar as raízes, ao valor em que resulta em zero, com o contrário temos $x \neq 0$

$x' = -5 \quad x'' = 3$

Sendo assim, temos 3 intervalos para x



Basta confirmar as hipóteses

- $x < -5$

$x = -6$, $(-6+5).(-6-3) > 0$

$\Rightarrow -1 . -9 > 0 \Rightarrow 9 > 0$

- $-5 < x < 3$

$x = 1$, $(1+5).(1-3) > 0$

$\Rightarrow 6 . -2 > 0 \Rightarrow -12 > 0$

- $x > 3$

$x = 4$, $(4+5).(4-3) > 0$

$\Rightarrow 9 . 1 > 0 \Rightarrow 9 > 0$

$\underline{(-\infty, -5) \cup (3, \infty+)}$

$|5x - 3| = 7$

↳ Definição de valor absoluto: $|A| = B \Rightarrow A = B$ ou $A = -B$

- $A = B$

$5x - 3 = 7 \ [+3]$

$5x = 7 + 3$

$5x = 10$

$x = \frac{10}{5} \Rightarrow x = 2$

- $A = -B$

$5x - 3 = -7 \ [+3]$

$5x = -7 + 3$

$5x = -4$

$x = -\frac{4}{5}$

Conjunto solução:

$\{2, -\frac{4}{5}\}$

REVISÃO VALORES ABSOLUTOS

$|3| = 3$
$|-3| = 3$
$-|3| = -3$

DADO POR $\rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{se } \geq 0 \\ -x & \text{se } < 0 \end{cases}$

É CHAMADO MÓDULO, POR CAUSA DA DISTÂNCIA DE ORIGEM EQUIVALENTE $\rightarrow$ (A PARTIR DA ORIGEM) $\rightarrow$ ZERO É A ORIGEM NA RETA REAL ENTRE SEU OPOSTO

$|7x-1| = |2x+5| \rightarrow$ Temos duas possibilidades
- $2x+5$
- $-(2x+5)$

- $7x - 1 = 2x + 5$ [+1]
  $7x = 2x + 5 + 1$ [-2x]
  $7x - 2x = 6$
  $5x = 6$ [÷5]
  $x = \frac{6}{5}$

- $7x - 1 = -(2x+5)$
  $= -2x - 5$ [+1]
  $7x = -2x - 5 + 1$ [+2x]
  $7x + 2x = -4$
  $9x = -4$ [÷9]
  $x = -\frac{4}{9}$

Conjunto Solução $\left\{-\frac{4}{9}, \frac{6}{5}\right\}$

$|9x+7| = -7 \rightarrow$ Resultado impossível

- NÃO É POSSÍVEL
  $|x| = -x$
- É POSSÍVEL
  $-|x| = -x$

$|7x-2| < 4 \rightarrow$ DE ACORDO COM A PROPRIEDADE

$$\left.\begin{array}{l} |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < a \end{array}\right\} \text{onde } a > 0$$

$-4 < 7x - 2 < 4$ [+2]

$-4+2 < 7x - 2 + 2 < 4 + 2$

$-2 < 7x < 6$ [÷7] $\qquad x \in \left(-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$

$-\frac{2}{7} < x < \frac{6}{7}$

$$\left|\frac{7-2x}{4+x}\right| \leq 2, \quad x \neq -4$$

$|7-2x| \leq 2\,|4+x|$ → ELEVAR AMBOS OS LADOS AO QUADRADO

$(7-2x)^2 \leq 4(4+x)^2$ → $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = (a^2+ab+ba+b^2) = (a^2+2ab+b^2)$

$(7^2 - 2[7(-2x)] + (2x)^2) \leq 4(4+x)^2$

$49 - 28x + 4x^2 \leq 4(4^2 + 2(4x) + x^2)$

$\leq 4(16 + 8x + x^2)$

$\leq 64 + 32x + 4x^2$

$49 - 28x + 4x^2 \leq 64 + 32x + 4x^2$ → REDUZIR A DESIGUALDADE PARA ≤ 0

$49 - 28x + 4x^2 - 64 - 32x - 4x^2 \leq 0$

$49 - 64 - 28x - 32x + 4x^2 - 4x^2 \leq 0$

$-15 - 60x \leq 0$ [+15]

$-60x \leq 15$ [x-1] → A DESIGUALDADE TBM É TROCADA

$60x \geq -15$

$x \geq -\frac{15}{60} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$

15, 60	3
5, 20	5
1, 4	N/A

$x \geq -\frac{1}{4}$ ou $x \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$