Se f(x)= cos x, mostre que f'(x)= -sen x.
Utilize a definição de derivadas!

A definição de função em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

↳ h é o incremento da variável

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$\cos(x+h)$ pode ser simplificado com a identidade de soma de ângulos.
Logo, $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$

Então: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}$

Ao agrupar os semelhantes termos: $\cos x \cos h - \cos x \Rightarrow \cos x(\cos h - 1)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$

↳ É possível quebrar o limite em duas porções

$$f'(x) = \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

Resolvendo os limites

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ ↳ Limite fundamental, esse limite já foi provado em aula. (VIA TEOREMA DO CONFRONTO)

$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \Rightarrow$ Usando a identidade de redução: $\cos h - 1 = -2 \sin^2 \frac{h}{2}$

$\Rightarrow \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \longrightarrow$ Mudança de variável para $t = \frac{h}{2}$. Se $h \to 0$ então $t \to 0$

$\Rightarrow \frac{-2 \sin^2 t}{2t} = -\frac{\sin^2 t}{t} \Rightarrow \sin t \cdot \frac{\sin t}{t}$

$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$; $\lim_{t \to 0} \sin t = 0$

$\Rightarrow -(0) \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Agrupando os limites:

$$f'(x) = \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

Assim, pela definição de derivadas:

$$(\cos x)' = -\sin x$$