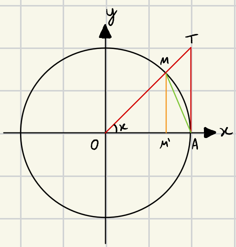
Três proposições caracterizam os limites fundamentais

- $\frac{0}{0}$
- 1^{∞}
- ∞^0

Todas são indeterminações.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é igual a 1 (se formos tratar os limites de forma separada, chegaríamos a indefinição $\frac{0}{0}$)

Considerando a circunferência



Seja $x = A\widehat{O}M$ (medido em radianos)

Limitamos a variação de x ao intervalo $(0, \pi/2)$

$\Delta MOA < M\widehat{O}A < \Delta OAT$

↳ ÁREA ↳ ÁREA SETOR ↳ ÁREA

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{MM'}}{2} < \frac{\overline{OA}\cdot\widehat{AM}}{2} < \frac{\overline{OA}\cdot\overline{AT}}{2} = \overline{MM'} < \widehat{AM} < \overline{AT}$$

$= \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ [$\div \operatorname{sen} x$ já que $\operatorname{sen} x > 0$ para $x \in (0, \pi/2)$]

$\operatorname{sen} x / \operatorname{sen} x = 1$

$x/\operatorname{sen} x = x/\operatorname{sen} x$

$$\operatorname{tg}/\operatorname{sen} x = \frac{\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad [x^{-1}]$$

$$= \left[1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x\right]^{-1} \to \frac{\cos x}{1} = \cos x$$

por outro lado, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\cos x$ são funções pares. Então,

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad e \quad \cos(-x) = \cos x$$

Logo, a desigualdade 1, vale para todo x, $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Exemplos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x.2}{x} \rightarrow$$ Troca de variável

$u = x.2$
$u \to 0$ $(0.2=0)$

Para x dividir $\Rightarrow u = x.2$ $[\div 2]$
$\frac{u}{2} = x \Leftrightarrow x = \frac{u}{2}$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\text{sen } u}{\frac{u}{2}} \rightarrow$$ Queremos transformar $\frac{u}{2}$ em u, para isso multiplicamos ambos limites por 2.

$$\frac{\lim_{x\to 0} \text{sen } u \,.\, 2}{\lim_{x\to 0} \frac{u}{2} . 2} \Rightarrow \frac{\text{sen } u.2}{\frac{u\cancel{2}}{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{\text{sen } u.2}{u} \rightarrow$$ Podemos isolar todas constantes em um limite.

$$\frac{2.\lim_{x\to 0} \text{sen } u}{\lim_{x\to 0} u} \Rightarrow 2. \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } u}{u}}_{\text{NOSSO LIMITE FUNDAMENTAL}} \Rightarrow 2.1 = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x} \rightarrow \lim_{x\to n} \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\lim_{x\to n} a}{\lim_{x\to n} b} \rightarrow$$ Tratar os limites de forma independente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\text{sen } 3x}{3x}\right) 3x \left[\cdot \frac{1}{3x} \cdot 3x\right]}{\left(\frac{\text{sen } 4x}{4x}\right) 4x \left[\cdot \frac{1}{4x} \cdot 4x\right]}$$

Como $\frac{3x}{4x}$ é constante, é possível reorganizar o limite

$$\frac{3}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\text{sen } 3x}{3x}}{\frac{\text{sen } 4x}{4x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\text{sen } u}{u}}{\frac{\text{sen } t}{t}} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

$u = 3x$
$t = 4x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{x} \Rightarrow \frac{\text{sen } x . 1}{\cos x . x} \rightarrow$$ Podemos reorganizar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$x \to 0$ $\cos x = 1$

LIMITE FUNDAMENTAL

$$2. \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Exemplos

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$t=\frac{1}{x}$, $t=\frac{1}{x}\to\pm\infty$

Isolando x

$t=\frac{1}{x}\Rightarrow tx=1\Rightarrow x=\frac{1}{t}$

Então,

$$\lim_{t\to\infty}(1-\tfrac{1}{t})^{t}=e \iff \lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$u=\frac{1}{t}$

$u\to\infty$ $(t\to 0\Rightarrow \frac{1}{0}=\pm\infty)$

Precisamos descobrir t para $(1+t)$

$u=\frac{1}{t}\Rightarrow ut=1\Rightarrow t=\frac{1}{u}$

$$\lim_{u\to\infty}\ln(1+\tfrac{1}{u})^{u}$$

↳ Possível isolar

$$=\ln\underbrace{\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}}_{e}$$

$=\ln e=1$

↳ Log natural de e é igual a 1

3. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a>0$ e $a\neq 1$

Fazendo $t=a^x-1$, temos:

$a^x=t+1$

Aplicando os logaritmos neperianos da igualdade

$\ln a^x=\ln(t+1)$

$x\ln a=\ln(t+1)$

$x=\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}$

Quando $x \to 0$, $x \neq 0$ temos que $t \to 0$, $t \neq 0$ e então podemos escrever

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}}$$

$$= \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \Rightarrow \ln a \cdot \frac{\lim_{t \to 0} 1}{\lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{t}} \Rightarrow \ln a \cdot 1 \Rightarrow \ln a$$

Concluímos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Exemplos

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ Temos, $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{b^x \left[\frac{a^x}{b^x} - 1 \right]}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} b^x \cdot \lim \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x}$$ Enxergue $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c^x$

$$= 1 \cdot \ln \frac{a}{b} \Rightarrow \ln \frac{a}{b}$$