Fundamentos da Matemática Elementar

Pg. 50, Anexo IV.

1) Demonstração das propriedades dos conjuntos

I) $A \cup (A \cap B) = A$

1. $(\forall x)(x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B))$ — H.
2. $(\forall x)(x \in A \vee (x \in A))$ — Simplificação - 1
3. $(\forall x)(x \in A)$ — Definição de A

II) $A \cap (A \cup B) = A$

1. $(\forall x)(x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B))$ — H.
2. $(\forall x)(x \in A \wedge x \in A)$ — Prop. Disjunção - 1
3. $(\forall x)(x \in A)$ — Simplificação - 2

III) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1. $(\forall x)(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$ — H.
2. $(\forall x)(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ — Distrib. - 1

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$

IV) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. $(\forall x)(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ — H.
2. $(\forall x)(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ — Distrib. - 1

$\Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Fundamentos da Matemática Elementar

Pg. 31, Exercícios 24 e 29

24) Prove que $A \subset (A \cup B), \forall A$

1. $(\forall x)(x \in A)$ — H.
2. $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B)$ — Adição

29) Prove que $(A \cap B) \subset A, \forall A$

1. $(\forall x)(x \in A \wedge x \in B)$ — H.
2. $(\forall x)(x \in A)$ — Simplificação
3. $(\forall x)(x \in A \wedge x \in B) \rightarrow (x \in A)$ — Ponens

Exercícios Adicionais

1) Sejam $A = \{0,2,4,6,8\}$ e $B = \{1,3,5,9\}$. Enumerar os elementos das seguintes relações

$R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x+1\}$

$R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid x \leq y\}$.

Dizer qual é o domínio, imagem e inversa de cada.

$R_1 = \{(0,1),(2,3),(4,5),(8,9)\}$

$dom(R_1) = \{0,2,4,8\}$

$im(R_1) = \{1,3,5,9\}$

$R_1^{-1} = \{(1,0),(3,2),(5,4),(9,8)\}$

$R_2 = \{(0,1),(0,3),(0,5),(0,9),$
$(2,3),(2,5),(2,9),$
$(4,5),(4,9),$
$(6,9),(8,9)\}$

$dom(R_2) = \{0,2,4,6,8\}$

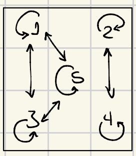
$im(R_2) = \{1,3,5,9\}$

$R_2^{-1} = \{(1,0),(3,0),(5,0),(9,0),$
$(3,2),(5,2),(9,2),$
$(5,4),(9,4),$
$(9,6),(9,8)\}$

6) Seja R a relação em $A = \{1,2,3,4,5\}$ tal que:
$xRy \Leftrightarrow (x-y$ é múltiplo de $2)$.

- Enumerar elementos de R.
- Definir as propriedades

$R = \{(1,1),(1,3),(1,5),$
$(2,2),(2,4),$
$(3,1),(3,3),(3,5)$
$(4,2),(4,4),$
$(5,1),(5,3),(5,5)\}$

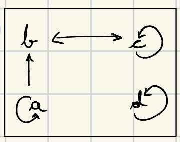


Possui as propriedades de:

- Reflexão
- Transitividade
- Simetria

7) Enumerar os elementos das relações $A = \{a,b,c,d\}$

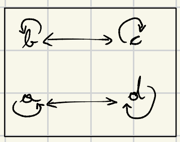
R_1



$R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,b),(d,d)\}$

n/a

R_2



$R_2 = \{(a,a)(a,d),(d,a),(d,d),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$

- Reflexiva
- Simétrica
- Transitiva

11) Seja $A = \{1,2,3\}$. Considere as seguintes relações:

$R_1 = \{(1,2);(1,1);(2,2);(2,1);(3,3)\}$

REFLEXIVA, SIMÉTRICA E TRANSITIVA

$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(1,2);(2,3)\}$

REFLEXIVA E ANTISIMÉTRICA

$R_3 = \{(1,1);(2,2);(1,2);(2,3);(3,1)\}$

ANTISIMÉTRICA

$R_4 = A \times A$

REFLEXIVA, SIMÉTRICA E TRANSITIVA

$R_5 = \emptyset$

REFLEXIVA, SIMÉTRICA, TRANSITIVA E ANTISIMÉTRICA

16) Seja A um conjunto finito de n elementos.

Quantas são as relações binárias em A?

2^{n^2}

Quantas são as relações reflexivas em A?

2^{n^2-2}

Quantas são as relações simétricas em A?

$2^{\frac{n^2-n}{n}}$

20) Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre $E = \{a,b,c\}$?

$R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$

SIM

$R_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c)\}$

NÃO

$R_3 = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$

NÃO

$R_4 = E \times E$

SIM

$R_5 = \emptyset$

SIM

23) Seja A o conjunto de retas de um plano α e P um ponto fixo em α.
Quais abaixo são relações de equivalência em A?

a) $xRy \Leftrightarrow x \parallel y$

SIM

b) $xRy \Leftrightarrow x \perp y$

NÃO

c) $xRy \Leftrightarrow P \in x \cap y$

SIM