GEOMETRIA ANALÍTICA

—''—''—

CÔNICAS

Cônicas (→ ou seções cônicas) são curvas obtidas pela interseção de um plano com um cone circular reto.

Dependendo do ângulo e posição, podem ser classificadas em três tipos:

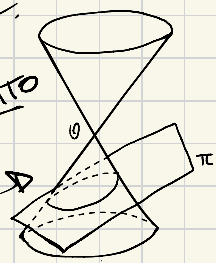
- Elipse
- Parábola
- Hipérbole

! π → Plano
θ → Cone

Elipse

Ocorre quando o plano corta o cone em um ângulo em relação a sua base, sem ser paralelo a nenhuma geratriz.

Exemplo bonito ''

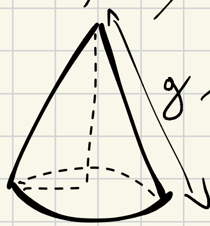


O que é uma Geratriz?

Uma geratriz é uma reta que ao se mover no espaço, gera uma superfície.

↳ ou "varre"

No caso específico de um cone circular reto, as geratrizes são as retas que partem do vértice do cone até qualquer ponto de sua base circular.

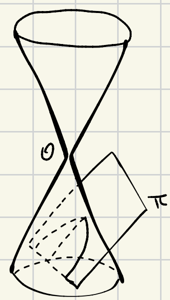


→ geratriz

Parábola

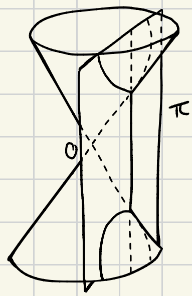
Ocorre quando um plano é paralelo a uma geratriz do cone.

Outro exemplo bonito →



Hipérbole

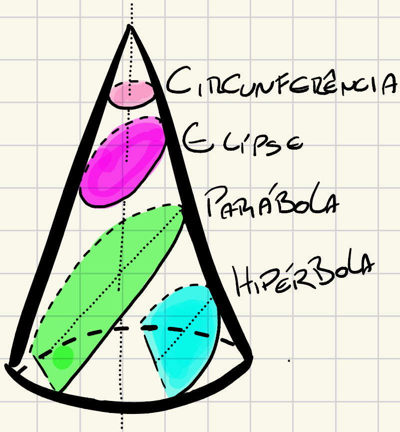
Quando π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície. A hipérbole deve ser vista como uma curva só, constituída de dois ramos, um em cada folha da superfície.



Recapitulando as cônicas

Sejam duas retas e e g em I e não perpendiculares. Considere e fixo e g girar 360° em torno de e, mantendo constante o ângulo entre estas retas.

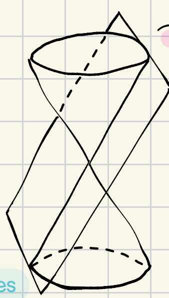
Assim, a reta g gera uma superfície circular infinita.

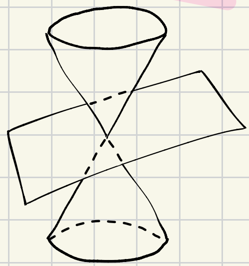


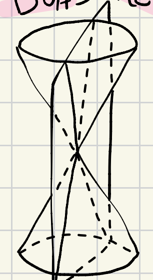
Casos Particulares

Além das cônicas clássicas, existem casos particulares (ou degenerados) que ocorrem quando o plano de corte passa pelo vértice do cone ou tem inclinações específicas. Estes casos particulares resultam em figuras simples, como pontos, retas ou pares de retas.

Se π passar por V, temos:

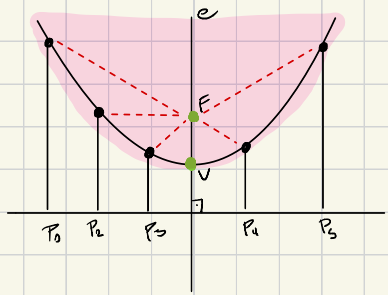




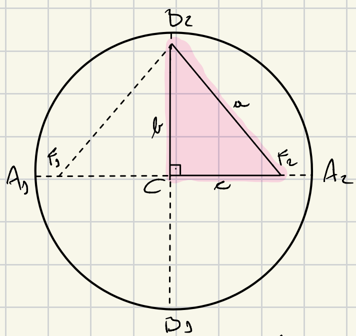


Representando de Forma Mais Precisa

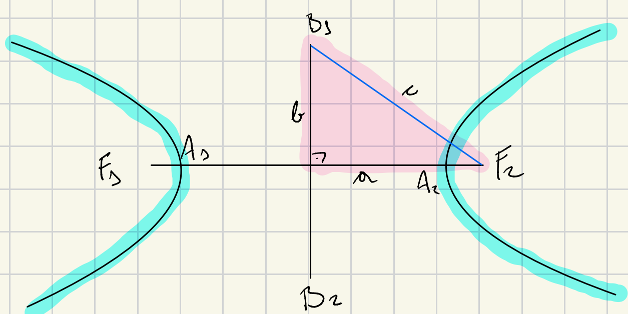
Parábola é o conjunto de planos do ponto que são equidistantes de F e d.



Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma distâncias a dois pontos desse plano é constante.



Hipérbole é a diferença das distâncias em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.



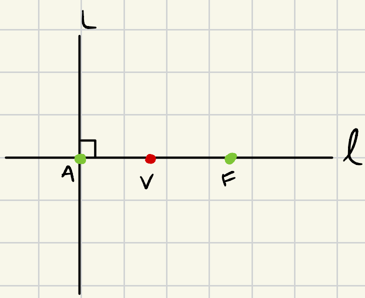
E^2quações

Parábola

Sejam L uma reta no plano e F um ponto no plano.

A parábola P de diretriz L e foco F é o conjunto que consiste de todos os pontos P do plano que são equidistantes do ponto F e da reta L.

$$P = \{ P \mid d(P,F) = d(P,F) \}$$



$L \rightarrow$ RETA DIRETRIZ DA PARÁBOLA

$l \rightarrow$ RETA QUE CONTÉM O FOCO E É PERPENDICULAR A L

↳ RETA FOCAL

$V \rightarrow$ VÉRTICE DA PARÁBOLA

Ou seja:

$$V = \frac{A+F}{2}$$

⚠ TODA PARÁBOLA É SIMÉTRICA EM RELAÇÃO À SUA RETA FOCAL.

As equações estarão definidas com $V=(0,0)$.

PARÁBOLA "À DIREITA"

$F=(p,0)$ e $d: x=-p$

onde $2p = d(F,L)$

$P=(x,y)\in \iff d(P,F) = d=(P,L)$

$\iff \sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$

$\iff (x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$

$\iff x^2-2px+p^2+y^2 = x^2+2px+p^2$

$\iff -2px+y^2 = 2px$

$\iff y^2 = 4px$

PARÁBOLA "À DIREITA"

$F=(-p,0)$ e $d: x=+p$

onde $2p = d(F,L)$

$P=(x,y)\in \iff d(P,F) = d=(P,L)$

$\iff \sqrt{(x+p)^2+y^2} = |x-p|$

$\iff (x+p)^2+y^2 = (x-p)^2$

$\iff x^2+2px+p^2+y^2 = x^2-2px+p^2$

$\iff +2px+y^2 = -2px$

$\iff y^2 = -4px$

Em PARÁBOLAS NO EIXO x, TEMOS:

$y^2 = -4px$ e $y^2 = 4px$

↳ Esquerda   Direita ↲

PARÁBOLA ACIMA

$F = (0, p)$ e $L: y = -p$

onde $2p = d(F, L)$

Logo, $P = (x, y) \in P$ se, e somente se:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

$$\iff x^2 = 4py$$

PARÁBOLA ABAIXO

$F = (0, -p)$ e $L: y = p$

onde $2p = d(F, L)$

Logo, $P = (x, y) \in P$ se, e somente se:

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y-p|$$

$$\iff x^2 = -4py$$

Em parábolas no eixo y, temos:

$$x^2 = 4py \quad e \quad x^2 = -4py$$

↳ CIMA ↳ BAIXO

Para obter a canônica da parábola, com vértice e reta focal paralelos ao eixo x, consideremos um sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$.

Com origem $\bar{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\bar{O}\bar{x}$ e $\bar{O}\bar{y}$.

<u>DIREITA</u>

Sabemos que a equação da parábola é $\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$.

Como $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$, temos:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

<u>ESQUERDA</u>

Sabemos também que nesse caso $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$.

Então, $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$

Made with Goodnotes

Cima

Se o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$ e diretriz $y = y_0 - p$

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

Baixo

Se o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$ e diretriz $y = y_0 + p$

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

Equação de Segundo Grau

Toda equação quadrática representa uma parábola, e toda parábola pode ser expressa por uma função quadrática.

Supondo que nossa cônica seja definida por:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

Temos o seguinte desenvolvimento:

$$y^2 \pm 4px - 2y_0 y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0$$

↳ Essa é a equação da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

↳ Igual para ambos os eixos.

Deixando a relação com a quadrática ainda mais evidente, vou representar de uma outra forma.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

VÉRTICE = (h,k)

FOCO = $(h, k+p)$ → SE $p>0$, CIMA; SE $p<0$, BAIXO

DIRETRIZ: $y = k-p$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$\iff x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$$
$$\iff y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x + \left(\frac{h^2+4pk}{4p}\right)$$

Quando comparado com $y = ax^2 + bx + c$:

$$a = \frac{1}{4p} \quad b = \frac{-h}{2p} \quad c = \frac{h^2+4pk}{4p}$$

Dada a equação geral das cônicas:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Evoluindo que, o que diferencia cada uma é a relação entre A, B e C.

A condição para uma parábola é um caso degenerado, onde:

$$\underline{Ax^2 + By^2} + \underline{Cxy} =$$

não forma elipse ou hipérbole.

• Se $A=0$ ou $B=0$
• E $C=0$, a parábola tem eixo paralelo a um dos eixos coordenados.

QUANDO $C \neq 0$, A PARÁBOLA ESTÁ ROTACIONADA

Dada a equação $y^2-6y+8x+1=0$

$$y^2-6y=8x-1 \rightarrow \text{COMPLETANDO QUADRADOS}$$

$$(y^2-6y+9)=-8x-1+9$$

$$(y-3)^2=-8x+8$$

TEMOS,

$$(y-3)^2=-8(x-1)$$

ELIPSE

Sabendo que elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Com os pontos distintos sendo F_1 e F_2, tal que:

$$d(F_1, F_2)=2c$$

e um número real positivo a tal que $2a>2c$.
Onde $2a$ é a soma das distâncias,

$$d(P, F_1)+d(P, F_2)=2a$$

QUANDO $F_1 = F_2$, TEM-SE
UMA CIRCUFERÊNCIA DE RAIO a

EXENTRICIDADE

A excentricidade é responsável pela forma da elipse.

Quando a excentricidade estiver próximo de 0, são quase circulares, quando próxima de 1, são elipses achatadas.

Seja a elipse de centro $(0,0)$. Temos dois casos:

1) Eixo maior sobre o eixo x

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\iff (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Com $a^2-c^2=b^2$, temos: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2) Eixo maior sobre y

De forma análoga:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Seja a elipse de centro C(h,k). Temos dois casos:

1) EIXO MAIOR PARALELO A x

É definida por:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Ao expressar a relação com o plano cartesiano usual, utilizamos as fórmulas de translação:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

2) EIXO MAIOR PARALELO A y

De forma análoga:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obtemos a equação geral da elipse:

$$Ax^2+Bx^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

Dadas as condições para ser elipse:

- A e B devem ter o mesmo sinal.
  - ↳ Ambos positivos ou negativos
- $C=0$
  - ↳ Se $C \neq 0$, a elipse está rotacionada

Dada a equação:

$$4x^2+9y^2-16x+18-11=0$$

$4x^2-16x+9y^2+18y=11$ → Agrupando os termos

$4(x^2-4x) = 4[(x^2-4x+4)-4] = 4(x-2)^2-16$ → Completar quadrados em x

$9(y^2+2y) = 9[(y^2+2y+1)-1] = 9(y+1)^2-9$ → Completar quadrados em y

Substituir os termos

↳ $4(x-2)^2-16+9(y+1)^2-9=11$

Simplificando a equação

$$4(x-2)^2-16+9(y+1)^2-9=11$$

$$4(x-2)^2+9(y+1)^2=36$$

Resultando em:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

Hipérbole

Sendo o conjunto de todos os pontos de um plano cujo diferença das distâncias, em valor absoluto a dois pontos fixos desse plano é constante.

Podemos definir a distância entre F_1 e F_2 como $2c$ e $2a$ é a constante por definição, com $2a < 2c$.

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Para as formas reduzidas em $(0,0)$ temos dois casos:

1) Com eixo real horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2) Com eixo real vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para as formas reduzidas em (h,k) temos dois casos:

1) Eixo real é paralelo ao eixo dos x

O procedimento é análogo ao feito na elipse, e resulta em:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2) EIXO REAL É PARALELO AO EIXO DOS y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Novamente, sabendo que a equação geral é dada por:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

para a forma padrão que revela centro, eixos, vértices e assíntotas, seguimos:

Eliminar o termo Cxy, se existir

Se $C\neq 0$, então rotacionamos os eixos com:

$$\tan(2\theta)=\frac{C}{A-B}$$

• Completar quadrados em:

SUPONDO QUE $C=0$, ENTÃO: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$

$$9x^2+16y^2-36x-32y-124=0$$

$$9x^2-36x-16y^2-32y=124$$ → AGRUPANDO OS TERMOS

$$9(x^2-4x)\Rightarrow 9[(x^2-4x+4)-4]=9(x-2)^2-36$$

↳ PARA x

$$-16(y^2+2y)\Rightarrow -16[(y^2+2y+1)-1]=-16(y+1)^2+16$$

↳ PARA y

SUBSTITUIR NA EQUAÇÃO

$$9(x-2)^2-36-16(y+1)^2+16=124$$

$$9(x-2)^2-16(y+1)^2-20=124 \quad (+20)$$

$$9(x-2)^2-16(y+1)^2=144$$

AO DIVIDIR PELO TERMO CONSTANTE:

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

USOS PRÁTICOS DAS CÔNICAS

Para os exemplos de uso, estarei falando apenas das 3 principais.

Elipses estão presentes tanto na medicina, em refletores elípticos usados para concentrar ondas de choque. Quanto em órbitas planetárias, nas leis de Kepler, onde os planetas orbitam o sol em trajetórias elípticas.

Parábolas são encontradas em antenas parabólicas e em faróis de carros, onde concentram sinais ou luz em um foco, refletindo raios paralelos ao eixo.

Hyperboles são usadas em sistemas de navegação como LORAN e o GPS, as hyperboles são usadas para determinar posição com base em diferença em tempos de sinais. São aplicadas também em telescópios, onde reduzem aberrações ópticas.