Lista Avaliativa 1

Resolva os exercícios 9, 17 e 19 das notas de Aula

9) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $A = A^T$, encontre o valor de x.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} = A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 2x-1 =$$ Sendo $x = 1$, então $2(1)-1 = 1$ e $(1)^2 = 1$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{A^T}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$x = 1$

17) Calcule o determinante de cada matriz a seguir:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 19 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 18 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -8 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\det(D) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1.2 - (-1)(-1) = 2 - 1 = 1$$

$$\det(E) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 19 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -19 + 24 + 9 - (19 - 18 + 12)$$

$$-50 + 51 = 1$$

$$\det(F) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 18 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -8 & -21 \end{vmatrix}$$

Basta calcular os cofatores dados por: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ → Determinante da submatriz

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 18 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & -8 & -21 \end{bmatrix} = 189 - 128 + 0 - (216 + 0 - 96)$$

$$189 - 128 - 216 + 96 = -59$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1(-59) = -59$$

$$M_{12} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 18 \\ -1 & -3 & 4 \\ -2 & -8 & -21 \end{bmatrix} = 126 - 64 + 144 - (108 + 168 - 64)$$

$$126 - 64 + 144 - 108 - 168 + 64 = -6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1(-6) = 6$$

$$M_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix} = 0 + 18 + 32 - (0 + 24 + 24)$$

$$18 + 32 - 24 - 24 = 2$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} = (-1)2 = -2$$

$$M_{13} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 18 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & -21 \end{bmatrix} = 0 - 24 + 72 - (0 - 32 + 63)$$

$$-24 + 72 + 32 - 63 = 17$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1(17) = 17$$

Agora somamos as expansões em cofatores

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$$

$$\det(A) = 1(-59) + 1.6 + 4.17 + 7.(-2) = 1$$

$\det(A) = 1$

Encontre a inversa da matriz, caso exista:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 29 \\ -1 & -4 & -22 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 29 \\ -1 & -4 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\det(U) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 29 \\ -1 & -4 & -22 \end{bmatrix} = -154 - 84 - 58 - (-49 - 132 - 116) = 1$$

$$\det(U) = 1$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 7 & 29 \\ -4 & -22 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}(-38) = -38; \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ -1 & -22 \end{bmatrix} = (-1)^{1+2}(-37) = 37; \quad C_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = (-1)^{1+3}(-5) = -5$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -22 \end{bmatrix} = (-1)^{2+1}(-16) = 16; \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -22 \end{bmatrix} = (-1)^{2+2}(-15) = -15; \quad C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3}(-2) = 2$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 29 \end{bmatrix} = (-1)^{3+1} 9 = 9; \quad C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 29 \end{bmatrix} = (-1)^{3+2} 8 = -8; \quad C_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = (-1)^{3+3} 1 = 1$$

Matriz de cofatores $C = \begin{bmatrix} -38 & 37 & -5 \\ 16 & -15 & 2 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$; $\text{adj}(U) = C^T \begin{bmatrix} -38 & 16 & 9 \\ 37 & -15 & -8 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$U^{-1} = \frac{1}{\underbrace{1}_{\det(U) = 1}} \text{adj}(U) \Rightarrow \text{adj}(U) \Leftrightarrow 1 \cdot \text{adj}(U)$$

Demonstração do Teorema 12

Se A for invertível, então $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

A só é invertível quando $\det(A) \neq 0$.

Para adj(A) precisamos da matriz dos cofatores onde,

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

para que $adj(A) = C^T$.

1. $AA^{-1} = I$
2. $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$
3. $\det(I) = 1$
4. $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ Equivalência lógica (2)
5. $\det(A) = 0$ suposição
6. $0 \det(A^{-1}) \neq 1$
7. $\perp$ Contradição em 4 e 6

A suposição de que $\det(A) = 0$ e possuir inversa, não é verdadeira.