9. O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \longrightarrow \text{VOU CHAMAR ESSE CONJUNTO DE } D$$

com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

1) Checar se é espaço vetorial de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

Para mostrar que D é subespaço ($\to$ ESPAÇO VETORIAL COM AS OPERAÇÕES HERDADAS), é necessário provar 3 coisas.

I) VETOR ZERO (0) PERTENCE A D.

Tomando $a=0$ e $b=0$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Logo, vemos que o vetor zero está em D.

II) FECHADO SOB SOMA

Tomando A e B como:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \text{ em } D.$$

Então, $A+B = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & b_1+b_2 \end{pmatrix}$, $A+B$ tem a mesma forma diagonal, então $A+B \in D$.

III) FECHADO SOB MULTIPLICAÇÃO DE ESCALAR

Para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix} \in D$$

2) BASE E DIMENSÃO

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D \subseteq \{a, b\}$, sendo assim $\dim(D) = 2$

—//—

Sim, o conjunto é um subespaço de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, pois:

- Contém matriz nula
- É fechado por adição e multiplicação escalar

Uma base possível é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e sua dimensão é 2.

TEOREMA 4.2.1 *Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.*

(a) *Se* **u** *e* **v** *forem vetores em W, então* **u** + **v** *está em W.*

(b) *Se a for um escalar qualquer e* **u** *algum vetor de W, então a***u** *está em W.*

1. Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de R^3.

(c) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c$.

$$W = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a + c \}$$

A condição $b = a + c$ permite que em W

$(a,b,c) = (a, a+c, c)$

• Valor nulo

$(0,0,0) \rightarrow a=0,\ b=0,\ c=0 \Rightarrow b=a+c \Leftrightarrow 0$

• Soma

Sejam $u=(a_1,b_1,c_1)$ e $v=(a_2,b_2,c_2)$ em W

$b_1=a_1+c_1$ e $b_2=a_2+c_2$

$u+v=([a_1+a_2],[\underbrace{b_1}_{(a_1+c_1)}+\underbrace{b_2}_{(a_2+c_2)}],[c_1+c_2])$

Então

$([a_1+a_2],\{[a_1+c_1]+[a_2+c_2]\},[c_1+c_2])$

• Multiplicação

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda u+\lambda v=(\lambda[a_1+a_2],\ \lambda[b_1+b_2],\ \lambda[c_1+c_2])$

↳ Relação análoga a soma

Então

$\lambda u+\lambda v=\lambda W$

• Base e dimensão

$(a,b,c)=(a,a+c,c)=a(1,1,0)+c(0,1,1)$

$\dim(W)=2$

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u}=(0,-2,2)$ e $\mathbf{v}=(1,3,-1)$?

(a) $(2,2,2)$ (b) $(3,1,5)$

(c) $(0,4,5)$ (d) $(0,0,0)$

W é a combinação linear de u e v se existem escalares tal que:

$au+bu=W$

ou

$a(0,-2,2)+b(1,3,-1)=(x,y,z)$

a) $(2,2,2) \rightarrow$ É combinação linear

$\underbrace{a}_{2}(0,-2,2)+\underbrace{b}_{2}(1,3,-1)$

$\Rightarrow (0,-4,4)+(2,6,-2)=(2,2,2)$

d) $(0,0,0) \rightarrow$ É combinação linear

b) $(3,1,5) \rightarrow$ É combinação linear

$\underbrace{a}_{4}(0,-2,2)+\underbrace{b}_{3}(1,3,-1)$

$\Rightarrow (0,-8,8)+(3,9,-3)=(3,1,5)$

9. Os vetores dados formam um conjunto linearmente dependente em R^3 com quais valores reais de λ?

$$\mathbf{v}_1=(\lambda,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}),\quad \mathbf{v}_2=(-\tfrac{1}{2},\lambda,-\tfrac{1}{2}),\quad \mathbf{v}_3=(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\lambda)$$

Os vetores vão ser linearmente dependentes se existirem escalares para cada vetor, nem todos nulos de modo que:

$av_1+bv_2+cv_3=(0,0,0)$

Isso é equivalente a dizer que uma matriz composta por estes vetores tem determinante zero (0).

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

Sendo assim, os vetores são linearmente dependentes para:
$\{\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{2}\}$

REVISÃO CONTEÚDO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

• ESCALONAR MATRIZES → O OBJETIVO É ZERAR A ENTRADA ABAIXO DO PIVÔ DA PRIMEIRA COLUNA

OPERAÇÕES ELEMENTARES PERMITIDAS
- TROCAR DUAS LINHAS.
- MULTIPLICAR UMA LINHA POR ESCALARES NÃO NULOS.
- SOMAR A UMA LINHA UM MÚLTIPLO DE OUTRA LINHA.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \to R_2 + R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to R_2 + (-2)R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 16 & 3 \end{bmatrix} \to R_2 + R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 16 & 3 \end{bmatrix} \to R_2 + (-4)R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

• POSTO DE CADA MATRIZ (RANK)

O posto de cada matriz ou rank, é o número de pivôs na forma escalonada.
Pivôs são os primeiros elementos não nulos de cada linha.

Por Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$ POSTO $= 3 \Rightarrow$ COLUNAS 1, 2 E 3.

• SISTEMAS LINEARES

↳ Sistema linear é um conjunto de equações lineares incógnitas (no caso x, y, z).

MATRIZ AUMENTADA
↳ Escreve-se a matriz dos coeficientes com uma coluna extra contendo os termos independentes.

a) $\begin{cases} x + y = 9, \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right]$

PARA RESOLVER
- Trocar duas linhas
- Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo
- Somar a uma linha um múltiplo de outra linha

Definir o pivô e zerar a entrada abaixo.

$R_2 \leftarrow R_2 + (-2)R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & 20 \end{array}\right]$

↳ É possível ler esta linha como: $-4y = -20 \Rightarrow y = \frac{-20}{-4} = 5$

Sendo assim: $x+y=9 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=4$

Logo, temos a solução $(x,y)=(4,5)$

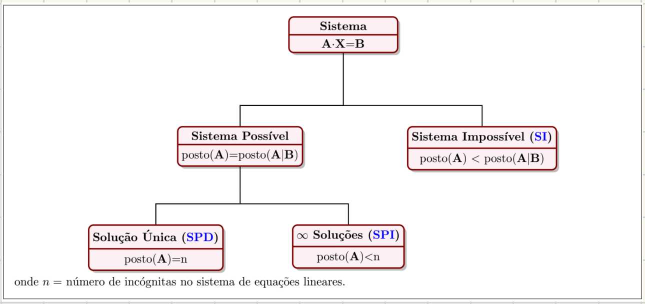
Ou seja SPD (sistema possível determinado)

b) $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ -x+4y+z=2, \\ 4x+9y+16z=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 16 & 3 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 16 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow$ $R_3 \leftarrow R_3 + (-4)R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow$

Tentando eliminar a segunda linha como pivô $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$, chegamos em $[0,0,0|1]$, ou seja $0x+0y+0z=1$, o que é uma contradição.

Logo, é um sistema impossível.



c) $C = \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+3y=17 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 17 \end{array}\right] \rightarrow R_2+(-2)R_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow \frac{1}{5} R_2$

↳ Estou buscando a forma escalonada reduzida. Ou seja, o pivô de cada linha deveria ser 1, para isso multiplico a linha por $\frac{1}{5}$, já que $\frac{1}{5} . 5 = 1$.

Importante ressaltar que isso não muda o sistema.

$R_2 \leftarrow \frac{1}{5} R_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow$ posto$(C)=2$

↱ MATRIZ EXPANDIDA

Como o posto$(C)=2$ = posto$(C|D)=2$ e o número de incógnitas é $n=2$, concluímos que o sistema é SPD (SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO)

Dada a matriz expandida temos o sistema:

$\begin{cases} x-y=1 \\ 0x+y=3 \end{cases} \Rightarrow y=3$ e $x-3=1=4$

Conjunto solução $(x,y)=\{4,3\}$

- INDEPENDÊNCIA LINEAR

Basicamente é a checagem se um vetor pode ser escrito como a combinação linear de outros vetores. Dado $v_1,\dots,v_k$ em um espaço vetorial, um vetor w é combinação linear desses vetores se existem escalares $c_1,\dots,c_k$ tais que:

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$$

SOLUÇÃO ÚNICA

Seja $v_1=(1,1)$ e $v_2=(2,3)$. Queremos $w=(5,7)$ é combinação linear como $av_1+bv_2=w$.

$a(1,1)+b(2,3)=(5,7)$

$\begin{cases} a+b2=5 \\ a+b3=7 \end{cases}$

Assim, $(5,7)=1(1,1)+2(2,3)$

- INDEPENDÊNCIA LINEAR

Se os vetores são independentes, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros. Já, se são dependentes, existe pelo menos um que é combinação dos outros. Sendo assim, ele não não adiciona nada de novo ao espaço.

Se $v_1, v_2, \dots, v_k$ são vetores em um espaço vetorial V, dizemos que são linearmente dependentes se a única solução do sistema $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$

é $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$