4. Quais dos conjuntos de vetores dados são base de P_2?

a) $v_1 = 1 - 3x + 2x^2$
$v_2 = 1 + x + 4x^2$
$v_3 = 1 - 7x$

P_2 tem dimensão 3, um conjunto de 3 vetores é base se, e somente se, for linearmente independente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -7 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Vou tirar a determinante usando Sarrus

$0 + (-12) + (-14) - (2 - (28))$

$-12 - 14 - 2 + 24 \Rightarrow -28 + 28 = 0$

Sendo assim, $\det(A) = 0$. Os vetores são linearmente dependentes, não formam base de P_2.

10- Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de p em relação à base $S = \{p_1, p_2, p_3\}$

a) $p = 4 - 3x + x^2$
$p_1 = 1$
$p_2 = x$
$p_3 = x^2$

Cada polinômio pode ser expresso de forma única como combinação linear dos vetores de uma base.

$\Rightarrow p = c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2)$
$4 - 3x + x^2 = c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2)$

O vetor de coordenadas de $p = 4 + 3x + x^2$ em relação a base é:

$p = (4, -3, 1)$

8- Encontre as dimensões dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), em que $d = a + b$ e $c = a - b$

$(a, b, c, d) = (a, b, a-b, a+b)$

agrupando por a e b: $a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1)$

Verificando a independência $a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) = (0,0,0,0)$

$\{(1,0,1,1), (0,1,-1,1)\}$ é uma base do subespaço.

Números de vetores na base $= 2$.

12- Em cada caso, encontre o vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$ que pode ser acrescentado ao conjunto $\{v_1, v_2\}$ para formar uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) $v_1 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (1, -2, -2)$

Para um vetor de base canônica em $\mathbb{R}^3$, temos: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$.
Sendo assim: $\{v_1, v_2, e_n\}$, basta definirmos o determinante.

Com e_1: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ Resolvendo com Laplace $1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -4 - (-6) = 1 \cdot 2 = 2$

$\det \neq 0$, um vetor que pode ser acrescentado é $e_1 = (1, 0, 0)$

6- Considere as bases $B = \{u_1, u_2\}$ e $B' = \{u'_1, u'_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Made with Goodnotes

a) Encontre a matriz de transição de B' para B.

$$P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) B para B'

É a inversa de $P_{B \leftarrow B'}$. Então, $P_{B' \leftarrow B} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) Calcule o vetor de coordenadas $[w]_B$, em que $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$
e use (10) para calcular $[w]_{B'}$

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (4.3 + 3.(-5)) = \frac{1}{11}(12 - 15) = -\frac{3}{11} \\ (-1.3 + 2.(-5)) = \frac{1}{11}(-3 - 10) = \frac{-13}{11} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{pmatrix}$$

d) Confira seu trabalho calculando $[w]_{B'}$ diretamente

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 3 \\ \alpha + 4\beta = -5 \end{cases}$$

$\alpha = -5 - 4\beta$

$2(-5 - 4\beta) - 3\beta = 3 \Rightarrow -10 - 8\beta - 3\beta = 3 \Rightarrow -11\beta = 13 \Rightarrow \beta = -\frac{13}{11}$

$\alpha = -5 - 4\left(-\frac{13}{11}\right) = -5 + \frac{52}{11} = -\frac{3}{11}$

Made with Goodnotes