1. Mostre que, se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores, então qualquer subconjunto não vazio de S também é linearmente independente.

Um conjunto linearmente independente é dado quando para todos os vetores do conjunto, se a única combinação linear que dá o vetor zero é a combinação trivial:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Dado o conjunto $T \subseteq S$, e que T seja linearmente dependente.
Existem vetores e escalares não nulos tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

NESSE CASO T ESTÁ EM UMA RELAÇÃO NÃO TRIVIAL COM S, E ISSO CONTRADIZ S SER L.I.

Porém isso contradiz o fato de que S é linearmente independente.
Portanto, nenhum subconjunto não vazio de S pode ser linearmente dependente.

2. Mostre que, se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço vetorial V e se $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ são quaisquer vetores que não pertencem a S, então o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ também é linearmente dependente.

Um conjunto linearmente dependente de vetores é dado por uma relação de vetores e escalares não não triviais, tal que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

SOLUÇÃO TRIVIAL É QUANDO TODOS OS ESCALARES SÃO NULOS. VIDE QUESTÃO 1

Considere $T \subseteq S$, com a seguinte combinação linear:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + 0 \cdot v_{r+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

Assim temos uma relação não trivial entre os vetores de T, sendo assim,
T é linearmente dependente.

3. Mostre que, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um conjunto linearmente independente e $\mathbf{v}_3 \notin \text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

$ger\{v_1, v_2\}$ é o gerador de v_1 e v_2, ou, o subespaço gerado por v_1 e v_2. É o conjunto de todos os vetores que podem ser feitos como combinação linear de v_1 e v_2.

$$ger\{v_1, v_2\} = \{av_1 + bv_2 : a, b \in \mathbb{F}\}$$

EXEMPLO EM $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,0,0)$
$v_2 = (0,1,0)$ $\Rightarrow$ Por definição $ger\{v_1, v_2\} = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Ou seja, todos os vetores cuja terceira coordenada é zero. Isso é uma descrição clara do plano xy que passa pela origem.

- Checando se um vetor está ou não no gerador

Tome $v_3 = (1,1,1)$. $v_3 \in \{v_1, v_2\}$?
Basta achar a, b tais que:

$$(a, b, 0) = (1, 1, 1)$$

Para as coordenadas:
$a = 1$, $b = 1$ e $0 = 1$
A última equação é impossível, portanto não existe a e b que representem v_3 como uma combinação de v_1 e v_2. Portanto, $v_3 \notin ger\{v_1, v_2\}$.

VOLTANDO AO ENUNCIADO - PROVAR QUE $\{v_1, v_2, v_3\}$ é independente quando $v_3 \notin ger\{v_1, v_2\}$

1. Considere uma combinação linear qualquer que dê zero:

$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$

Queremos provar que $a_1=a_2=a_3=0$.

2. Se $a_3=0$, basta rearranjar para

$a_1v_1+a_2v_2=0$

Sabemos que $\{v_1,v_2\}$ é linearmente independente, então temos uma solução trivial com:

$a_1=a_2=0$.

3. Se $a_3\neq 0$, então:

$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0,\ a_3\neq 0$

$a_3v_3=-(a_1v_1+a_2v_2)$ → a_3 POSSUI INVERSO MULTIPLICATIVO a_3^{-1} NO CORPO DE ESCALARES

$a_3v_3(a_3^{-1})=-(a_1v_1+a_2v_2)(a_3^{-1})$

↳ PELA PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DOS ESCALARES: $a^{-1}.a=1$. ENTÃO $1.v_3=v_3$

$v_3=-(a_1v_1+a_2v_2)(a_3^{-1})$ → USANDO A DISTRIBUTIVIDADE

$v_3=-([a_3^{-1}a_1]v_1+[a_3^{-1}a_2]v_2)$

CONVENIENTEMENTE, PODEMOS ESCREVER OS PRODUTOS ESCALARES COMO RAZÕES:

$v_3=-\frac{a_1}{a_3}v_1-\frac{a_2}{a_3}v_2 \longrightarrow a_3^{-1}.a_1 \Rightarrow \frac{1}{a_3}.a_1=\frac{a_1}{a_3}$

↳ PODEMOS REPRESENTAR $^{-n}$ COMO: $\frac{1}{n}$

4. Determine se os seguintes vetores são linearmente independentes em $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&3\\0&2\end{bmatrix}$

a) Se $aA+bB=0$, então

$$a\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\a&a\end{bmatrix}$$

Logo $a=0$ e $b=0$. Portanto, linearmente independentes

b) Dados os escalares $a=b=c=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}a&b\\c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Portanto, linearmente dependentes.

c) $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}2&3\\0&2\end{bmatrix}$

$aI+bE+cG=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2c&b+3c\\0&a+2c\end{bmatrix}$ Temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}a+2c=0\\b+3c=0\end{cases}$$

Resolvendo: $a=-2c$, $b=-3c$ e $c=1$.

Portanto, linearmente dependente

5. Determine se os seguintes vetores são linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$.

(a) $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

$v_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\Rightarrow av_1+bv_2\Rightarrow\begin{cases}2a+3b=0\\a+2b=0\end{cases}$ → DA PRA FAZER MAIS SIMPLES

TIRAR O DETERMINANTE $\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=4-3=1$. $\det\neq 0$. Portanto, linearmente independente.