1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) $A+B$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ b) $A-B$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ c) $2A-5B$ $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 8 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

a) $A+B$ $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 7 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 16 \end{bmatrix}$ b) $A-B$ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -9 \\ -9 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ c) $3A-2B$ $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -18 \\ -19 & -1 & 9 \\ 5 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

3) DETERMINE AB, SENDO:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.1+2.1 & 1.1+2.1 \\ 0.1+2.1 & 0.1+2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Se A é m×n e B é n×p, o elemento (i,j) de AB é a soma da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B.

Sendo assim: $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$

A deve possuir em COLUNAS, o que B tem em LINHAS.

$$AB = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{kj}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.4+2.(-2) & 1.(-6)+2.3 \\ 2.4+4.(-2) & 2.(-6)+4.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.1+2.(-1)+4.7 \\ 2.1+6.(-1)+0.7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.1+2.(-1)+(-1).1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & 2.5 & 2.6 \\ 3.4 & 3.5 & 3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$

f) $AB \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

4) Sejam A e B, mostre que $AB \neq BA$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$AB \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.2 + 2.(-3) & 1.(-1) + 2.4 \\ 3.2 + 2.(-3) & 3.(-1) + 2.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\neq$ $\quad \} \ AB \neq BA$

$BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.1 + (-1).3 & 2.2 + (-1).2 \\ -3.1 + 4.3 & -3.2 + 4.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

5) Para que $AB = BA$, podemos começar com uma matriz NILPOTENTE

$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ N^2 = 0$

Agora basta definir a criação das matrizes com base em escalares.

$A = I + N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = 2I + 3N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Como ambas são expressas como polinômios em N, elas necessariamente comutam:

$AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

6) Uma matriz é indepotente quando $A^2 = A$ onde $A^2 = A.A$.
Mostre que os seguintes matrizes são indepotentes

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.1 + 1.0 & 1.0 + 0.0 \\ 1.1 + 1.0 & 1.0 + 0.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} & \frac{2}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} & \frac{2}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7) Encontre matrizes $\underbrace{A, B \text{ e } C}_{2 \times 2}$ distintas, tal que:
$AC = BC$
mas $A \neq B$

Para que isso seja verdade, basta escolher C como uma matriz SINGULAR
↳ ou seja, uma matriz NÃO INVERSÍVEL

Neste caso vou pegar uma matriz nula para ser C

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Sendo assim, mesmo $A \neq B$, teremos:
$AC = A.0 = 0 = B.0 = BC$

8) $A = A^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = B^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ $C = C^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 15 & 19 \\ 12 & 16 & 20 \\ 13 & 17 & 21 \\ 14 & 18 & 22 \end{bmatrix}$

9) Cheque se as matrizes são simétricas ou anti-simétricas

Se $M^T = M$, então a matriz é simétrica.
Se $M^T = -M$, então a matriz é anti-simétrica.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $A^T = A$

$B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $B^T = B$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$C^T \neq C$ pois logo na primeira linha vemos que:

$C^T[0 \ 1 \ 2] \neq C[0 \ -1 \ -2]$

Então $C^T = -C$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$E \neq E^T \neq -E$

E^T não é simétrica nem anti-simétrica

10) $A = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 2-x & 0 \end{bmatrix}$ e $A = A^T$

$$x = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1^2 \\ 2-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$