1. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tem a propriedade de que $A^2 = \mathbf{0}$. É possível para uma matriz simétrica 2×2 não nula ter essa propriedade? Demonstre sua resposta.

$A^2 = 0$ mas $A \neq 0$, sendo assim, a matriz A é "nilpotente".

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + (-1).1 & 1(-1) + (-1)(-1) \\ 1.1 + (-1).1 & 1(-1) + (-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em $\mathbb{R}$, a soma dos quadrados só pode ser zero se cada termo for zero. Existem matrizes nilpotentes 2x2 como A, porém ao exigir simetria, a única solução é a matriz nula.

DEMONSTRAÇÃO

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

Para que $B^2 = 0$, $a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = 0 \rightarrow a = b = c = 0$. Com isso conclui-se que a única matriz simétrica que satisfaz $B^2 = 0$ é $B = 0$. Ou seja, uma matriz nula.

2. A matriz Sejam A e B matrizes simétricas $n \times n$. Para cada um dos seguintes, determine se a matriz dada deve ser simétrica ou pode ser não simétrica:

(a) $C = A + B$

(b) $D = A^2$

(c) $E = AB$

(d) $F = ABA$

(e) $G = AB + BA$

(f) $H = AB - BA$

NESTE CASO, SÃO SIMÉTRICAS SE:
$A^T = A$ e $B^T = B$

a) $C = A + B = A^T + B^T = (A+B)^T = C^T \rightarrow$ A transposição redistribui os mesmos valores sobre a soma.
Somar duas simétricas preserva a simetria.

SIMÉTRICA

b) $D = A^2 = A.A = A^T.A^T = (A.A)^T = (A^2)^T = D^T$

SIMÉTRICA

Uma matriz simétrica por ela mesma, apenas preserva a simetria $(A^2)^T = KA$.

c) $E = AB$, AB pode não ser simétrica. Se forem simétricas, A e B devem comutar.

$(AB)^T = B^T A^T = AB$ ou $AB = (AB)^T \Leftrightarrow BA = (BA)^T$

d) $F = ABA \rightarrow ABA$ funciona como um palíndromo.

$F = ABA = (ABA)^T = A^T . B^T . A^T = F^T$

SIMÉTRICA

Se chama "anticomutador"

e) $G = AB + BA$

$G = AB + BA = BA + AB = (AB)^T (BA)^T = (AB + BA)^T = G^T$

SIMÉTRICA

$\hookrightarrow AB = \frac{1}{2}(AB + BA)$

f) $H = AB - BA$

$H = AB - BA = (AB)^T - (BA)^T = BA - AB = -(AB - BA) = -H$

H não é simétrica a menos que seja matriz nula.

NÃO SIMÉTRICA

3. A matriz Seja C uma matriz $n \times n$ não simétrica. Para cada um dos seguintes, determine se a matriz dada deve ser simétrica ou pode ser não simétrica:

(a) $A = C + C^T$

(b) $B = C - C^T$

(c) $D = C^T C$

(d) $E = C^T C - CC^T$

(e) $F = (I + C)(I + C^T)$

(f) $G = (I + C)(I - C^T)$

a) $A = C + C^T = C^T + C = (C + C^T)^T = A^T$

SIMÉTRICA

$\hookrightarrow$ A soma de uma matriz com a transposta é usada para forçar simetria. Sendo assim, $A = A^T$.

b) $B = C - C^T = C^T - C = (C - C^T)^T = -B$

NÃO SIMÉTRICA

$\hookrightarrow$ A subtração de uma matriz com a sua transposta é usada para forçar anti-simetria. Sendo assim, $B^T = -B$.

c) $D = C^T C = (C^T C)^T = D^T$

SIMÉTRICA

$\hookrightarrow$ Produtos do tipo $x^T x$ são sempre simétricos e semidefinidos positivos.

$x^T D x = x^T C^T C x = \|Cx\|^2 \geq 0$

Obs: D é simétrica independentemente de C.

d) $E = C^T C - CC^T \rightarrow$ A diferença de simétricos continua simétrica.

SIMÉTRICA

$E = (C^T C - CC^T)^T = (C^T C)^T - (CC^T)^T = E^T$

e) $F = (1+C)(1+C^T)$ → forçando simetria

Se → Substituir variáveis

$x = 1 + C$, então

$F = xx^T$ → novamente, o mesmo padrão de forçar simetria.

$F = xx^T = F^T$, F sempre será simétrico.

Simétrica

f) $G = (1+C)(1-C^T)$ → $1 - C^T = (1-C)^T$, antissimétrica

Substituindo variáveis,

$x = 1 + C$, $y = 1 - C$, $x \neq y$

Para que forem simétricos, precisaríamos que, $(1+C)(1-C^T) = (1-C)(1+C^T)$

caso que não ocorre.

Contraexemplo

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq C^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 + C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 1 - C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1+C)(1-C^T) = \begin{bmatrix} 1.1 + 1(-1) & 1.0 + 1.1 \\ 0.1 + 1(-1) & 0.0 + 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = G$$

$$G^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq G$$

Não Simétrica

4. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se

$$AB = A \quad \text{e} \quad B \neq I$$

então A deve ser singular.

Uma matriz singular é uma matriz quadrada A cujo determinante é igual a zero.
Se uma matriz não é singular, ela possui uma inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$

$AB = A \quad B \neq I$

↳ $B \neq I$ força a não-inversibilidade de A.

$AB = A \Rightarrow AB - A = 0 \Rightarrow A(B-1) = 0$

Se $B \neq 1$, então $B - 1 \neq 0$, logo $B-1$ não é matriz nula.

Se A fosse inversível, seria possível multiplicar A^{-1} à esquerda de A.

$A^{-1} \cdot A = 1$, então

$A^{-1} \cdot A(B-1) = 1(B-1) = B - 1 = 0 \Rightarrow B = 1$

5. Seja A uma matriz não singular. Mostre que A^{-1} também é não singular e que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Uma matriz não singular sempre vai possuir uma inversa.

Logo:

$AA^{-1} = I$ e $A^{-1}A = I$

é possível dizer também que x é a inversa de A^{-1} quando:

$xA^{-1} = I$ ou $A^{-1}x = I$

tomando $x = A$, se a inversa de A é A^{-1} então:

$(A^{-1})^{-1} = A$,

a inversa da inversa é igual a matriz original.

É possível checar pelos determinantes, $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \neq 0$.

6. Mostre que, se A é não singular, então A^T é não singular e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

[Sugestão: $(AB)^T = B^T A^T$]

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ou seja, se A é não singular então sua transposta A^T, também é não singular.

$AA^{-1} = I$ e $A^{-1}A = I$

Sendo assim AA^{-1} possui a seguinte propriedade

$(AA^{-1})^T = I^T \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I$

$I = I^T$ pois a matriz identidade é simétrica

Isso mostra que $(A^{-1})^T$ é uma inversa à esquerda de A^T.

Para matrizes quadradas, possuir inversa à esquerda e à direita implica ser a inversa única.

Logo, A^T é invertível:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

A^T É NÃO SINGULAR.

7. Uma matriz quadrada A é chamada de **nilpotente** se existe um número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A^k = \mathbf{0}$$

sendo $\mathbf{0}$ a matriz nula. O menor valor de k que satisfaz essa condição é chamado de *índice de nilpotência* da matriz.

(a) Verifique se a matriz abaixo é nilpotente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Determine o índice de nilpotência de A.

Índice de nilpotência se dá por $A^k = 0$.

EXEMPLO: $A^2 = A.A = 0$

a) $$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A^2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A^3}$$

! Essa matriz é a matriz de deslocamento superior (SHIFT). Ela empurra a base canônica para frente.

A matriz A é nilpotente

b) 3

8. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que, se $A^2 = 0$, então $I - A$ é não singular e $(I - A)^{-1} = I + A$.

Se $A^2 = 0$,

$$(I - A)(I + A) = I.I + I.A - A.I - A.A = I + A - A - A^2 = I - A^2 = I - 0 = I$$

$$(I + A)(I - A) = I - A^2 = I$$

Logo $(I - A)^{-1} = I + A$

9. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que, se $A^{k+1} = 0$, então $I - A$ é não singular e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k$$

Se $A^{k+1} = 0$, então

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I$$

Logo $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k$