1) Se A é uma matriz simétrica, então $A - A^T$ é ___

R: $\emptyset$, MATRIZ NULA

2) Se A é uma matriz triangular superior, então $A^T$ é ___

Obs: Uma matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Formalmente, uma matriz $U(ij)$ de ordem $n$ é triangular superior se:

$U_{ij} = 0$ PARA TODO $i > j$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

A diagonal principal é o conjunto dos elementos que estão localizados nas posições em que o ÍNDICE DA LINHA É IGUAL AO ÍNDICE DA COLUNA

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

R: Se A é triangular superior, sua transposta $A^T$ será uma matriz triangular inferior

$$U^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

3) Se A é uma matriz diagonal, então $A^T$ é ___

Se A é uma matriz diagonal, então os elementos fora de sua diagonal são zero.

Logo $A^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4) Verdadeiro ou Falso?

a) $(-A)^T = -(A^T) \to$ VERDADEIRO

Se $A = -A \to$ MATRIZ NULA

Se $A^T = -A \to$ ANTISSIMÉTRICA

b) $(A+B)^T = A^T + B^T \to$ VERDADEIRO

PELA COMUTATIVIDADE, TAMBÉM PODE SER: $B^T + A^T$

c) Se $AB=0$, então $A=0$ ou $B=0$ → FALSO

↳ Esta é propriedade dos numeros reais

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

d) $(k_1A)(k_2B)=(k_1k_2)AB$ → VERDADEIRO

↳ VÁLIDO POR CAUSA DA DISTRIBUTIVIDADE E ASSOCIATIVIDADE

e) $(-A)(-B)=-(AB)$ → FALSO

↳ O SINAL DE MENOS É ESCALAR, ENTÃO:

$$(-1)A\cdot(-1)B=(-1)^2AB=AB$$

f) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB=BA$ → FALSO

↳ SIMETRIA GARANTE QUE:
- $A=A^t$
- $B=B^t$

SIMETRIA NÃO GARANTE COMUTATIVIDADE. A COMUTATIVIDADE SÓ OCORRE COM MATRIZES SIMULTANEAMENTE DIAGONAIS NA MESMA BASE.

g) Se $A.B=0$, então $B.A=0$ → FALSO

↳ EM MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES, A ORDEM IMPORTA.

h) Se podemos efetuar o produto $A.A$, então A é uma matriz quadrada → VERDADEIRO

↳ SE A.A TEM PRODUTO, ENTÃO É UMA MATRIZ QUADRADA.

5) Se $A=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$, ache B, de modo que $B^2=A$

$$B=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&1\end{bmatrix}\qquad B^2=\begin{matrix}1.1+(-1).(-2) & 1.(-1)+(-1).1\\ -2.1+1.(-2) & (-2)(-1)+1.1\end{matrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

6) Suponha que $A\neq0$ e $AB=AC$, onde A, B, C são matrizes tais que a multiplicação esteja definida

a) $B=C$?



Não, isso apenas implica que $AB=AC$ é equivalente à $A(B-C)=0$.

b) Se existir $Y$ tal que $YA = I$, onde $I$ é identidade, então $B = C$?

$Y$ deve ser a inversa de $A$ para que $YA = I$, isso garante que $A$ é cancelável, então $AB = AC$ implica $B = C$

$$Y(AB) = Y(AC) \Rightarrow (YA)B = (YA)C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

7- Explique por que, em geral,

- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B$
- $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

A identidade distributiva é a mesma que na multiplicação, porém em matrizes a ordem importa.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underline{AB + BA} + B^2$$

$AB + BA$ só vai ser igual à $2AB$ se $A$ e $B$ comutarem.

No geral, $AB + BA \neq 2AB$.

O mesmo vale para,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2 + (AB - BA)$$

$-AB + BA$ não se cancelam.

**8.** Seja

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule $S^k$ para $k = 2, \ldots, 6$.

$S^k$ pode ser entendido como um SHIFT na matriz. Toda vez que $S^k$, os valores se aproximam cada vez mais da superdiagonal, onde em:

- $S^5 = 0_{5\times5}$
- $S^6 = 0_{5\times5}$