Fatoração L.U.

Usado para a solução de equações lineares $Ax = B$, fatorando a matriz A em $A = LU$ em que L e U são matrizes com estruturas particularmente convenientes.
Em outras palavras a fatoração de uma matriz A é uma equação que expressa A como o produto de duas ou mais matrizes.

Multiplicação de Matrizes

↳ É uma síntese de dados (combinando o efeito de duas ou mais transformações lineares em uma matriz)

Fatoração de Matriz

↳ É uma análise de dados. Nesse caso, A é o produto do processamento dos dados de A.

Exemplo de uma fatoração LU:

$$Ax = B_1,\ Ax = B_2,\ \dots,\ Ax = B_n$$

Quando A é inversível, podemos

$$A^{-1}B_1,\ A^{-1}B_2,\ \dots,\ A^{-1}B_n$$

Sendo assim

$$A.x = b$$
$$\Leftrightarrow (LU).x = b$$
$$\Leftrightarrow Ly = b$$
↳ $Ux = y$

$$\begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$

A diferença entre os approaches (Gauss e LU)

- Gauss $= [A|b]$ ↳ trabalha com matriz expandida
- LU $= [A]$ ↳ trabalha somente com a matriz A

L → Lower

É uma matriz triangular inferior, com diagonal unitária e demais elementos são os multiplicadores das etapas do escalonamento.

U → Upper

É uma matriz triangular superior, resultante do escalonamento.

Teorema

Se o determinante de todos os menores principais da matriz A forem não-nulos, então a fatoração $A = LU$

- Menores Principais

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}$$

Cada região dividida por ⬚, é um menor principal da matriz.
Se o determinante de cada menor principal for zero, temos uma solução única.

Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Matriz L → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$

Matriz U → $\begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}3&2&4\\1&1&2\\4&3&-2\end{bmatrix} \longrightarrow$$ Após a definição dos pivôs, definimos os multiplicadores de linha

- $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$

E então, a atualização das linhas $L_i \leftarrow L_i - (m_{ik} \times L_{pivô})$

↱ 3 é meu PIVÔ

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}3&2&4\\1&1&2\\4&3&-2\end{bmatrix}$$

$\to L_2 \leftarrow L_2 + (-1)(\frac{1}{3}.L_1) = (\frac{1}{3})(3,2,4) \Rightarrow (1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

$\Rightarrow (1,1,2) - (1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\to L_3 \leftarrow L_3 + (-1)(\frac{4}{3}.L_1) = (\frac{4}{3})(3,2,4) \Rightarrow (4, \frac{8}{3}, \frac{16}{3})$

$\Rightarrow (4,3,-2) - (4, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}) = (0, \frac{1}{3}, \frac{-22}{3})$

Sendo assim, agora temos

↱ $\frac{1}{3}$ é meu PIVÔ

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}3&2&4\\0&1/3&2/3\\0&1/3&-22/3\end{bmatrix}$$

$\to L_3 \leftarrow L_3 + (-1)(1.L_2) \Rightarrow (0, \frac{1}{3}, \frac{-22}{3}) - (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (0,0,-8)$

Sendo assim

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}3&2&4\\0&1/3&2/3\\0&0&-8\end{bmatrix} = L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1/3&1&0\\4/3&1&1\end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix}3&2&4\\0&1/3&2/3\\0&0&-8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1/3&1&0\\4/3&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \therefore y_1 = 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + y_2 = 2 \longrightarrow \frac{1}{3}.1 + y_2 = 2 \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3}y_1 + y_2 + y_3 = 3 \to \frac{4}{3}.1 + \frac{5}{3} + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 3-3 \Rightarrow y_3 = 0 \end{cases} \quad y=\begin{bmatrix}1\\5/3\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&4\\0&1/3&2/3\\0&0&-8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5/3\\0\end{bmatrix} = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \to 3x_1 + 10 = 1 \Rightarrow 3x_1 = -9 \Rightarrow x_1 = \frac{-9}{3} = -3 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \to \frac{1}{3}x_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1} \Rightarrow x_2 = 5 \\ -8x_3 = 0 \to x = 0 \end{cases} \quad x=\begin{bmatrix}-3\\5\\0\end{bmatrix}$$

PROVA REAL

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} 3(-3) + 2(5) + 0 = -9+10 = 1 \\ -3 + 5 + 0 = -3+5 = 2 \\ 4(-3) + 3(5) - 0 = -12+15 = 3 \end{cases}$$