Tipos essênciais de Matrizes

- Matriz nula → Quadrada ou retangular
  ↳ Todas as entradas são nulas

- Matriz diagonal → É matriz quadrada
  ↳ $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

  * Ou seja, todos os elementos fora da diagonal principal são 0 (zero).

- Matriz Identidade → É matriz quadrada
  ↳ possui diagonal (1,1,1)

  * $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Matriz Triangular Inferior → $n \times n$
  ↳ $A = (a_{ij}) \rightarrow a_{ij} = 0$ se $i < j$

  * $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

⚠ A matriz identidade é ao mesmo tempo triangular inferior e superior.

- Matriz Triangular Superior → $n \times n$
  ↳ $A = (a_{ij}) \rightarrow a_{ij} = 0$ se $i > j$

  * $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- Soma → Duas matrizes de mesmo tamanho
  * $a_{m \times n} + b_{mn} = c_{m \times n}$
    ↳ O produto da soma possui o mesmo tamanho

- Diferença → Matrizes de tamanhos distintos não podem ser subtraídas.

⚠ As operações são sempre feitas conforme a ordem de entrada.
Soma e diferença em matrizes, não são comutáriis.

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & -3+5 \\ 3+0 & 4+3 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

A diferença segue o mesmo caminho.

- **MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR**

$M_{m \times n}$ por um escalar λ

* $B = \lambda A$

$b_{ij} = \lambda a_{ij}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

ou,

$[\lambda A_{ij}] = \lambda a_{ij}$

B é chamado de múltiplo escalar por A.

- **PRODUTO POR DUAS MATRIZES**

Duas matrizes tais que o número de colunas da primeira é igual o número de linhas da segunda.

$A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$, $\longrightarrow A_j = B_i$ (nº DE ELEMENTOS)

é definido pela matriz $m \times n$ obtida por:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}, \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n$$

ou

$$[AB]_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A_{ij} \cdot B_{ij}$; $3 = 3$ — A coluna de "A" deve ter o mesmo número de elementos que as linhas de B. ($A_j = B_i$)

! O produto entre matrizes não é comutável.

$$AB = \begin{bmatrix} 1.(-2) + 2.0 + (-3).5 & 1.1 + 2.3 + (-3).(-4) & 1.0 + 2.0 + (-3).0 \\ 3.(-2) + 4.0 + 0.5 & 3.1 + 4.3 + 0.(-4) & 3.0 + 4.0 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

- INDEPOTÊNCIA

Uma matriz é dita indepotente se $A^2=A$, onde $A^2=A.A$.

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE MATRIZES

1- $A+(B+C)=(A+B)+C$
2- $A+B=B+A$
3- Existe uma matriz 0 tal que $A+0=A$ ou $0+A=A$ (MATRIZ NULA)
4- Para toda matriz A, existe uma matriz B tal que $A+B=0$.
  * Denotamos $B=-A$.
5- Existe uma matriz I tal que $A.I=I.A=A$ (MATRIZ IDENTIDADE)
6- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
7- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
8- $A(B+C)=AB+AC$
9- $A(B.C)=(A.B)C$
10- $\alpha(A.B)=(\alpha A).B=A.(\alpha B)$

MATRIZ TRANSPOSTA → Denota-se por A^T
↳ Pode ser qualquer matriz $m\times n$
↳ Resulta em $m\times n^T = n\times m$

* Ou seja, dada uma matriz A. A primeira coluna de A^T é a primeira coluna de A, e assim por diante.

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES DA MATRIZ TRANSPOSTA

1- $(A^T)^T=A$
2- $(A+B)^T=A^T+B^T$
3- $(AB)^T=B^T.A^T$
4- $(\alpha A)^T=\alpha A^T,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Simetria

Dizemos que A é simétrica quando,
$A = A^T$
e anti-simétrica quando,
$A^T = -A$

Produto de matrizes simétricas → Só é simétrica se A e B comutam
* AB é simétrica $\iff AB = BA$

Matriz Inversa → Cada número não nulo "a" tem um recíproco $a^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$
* Com as propriedades
  - $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

a^{-1} é denominado inverso multiplicativo de "a"

Se A e $B = A^{-1}$, então $AB = BA = I_n$

Propriedades das Matrizes Inversas

1- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3- A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$
4- A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$
5- kA é invertível com qualquer escalar não nulo $k \in \mathbb{R}$ e $(kA)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$