

## INTERPOLAÇÃO DE HERMITE

### POLINÔMIOS OSCULADORES

↳ GENERALIZAM TANTO POLINÔMIOS DE TAYLOR QUANTO OS POLINÔMIOS DE LAGRANGE.

SUPONHA  $n+1$  NÚMEROS DISTINTOS  $x_0, x_1, \dots, x_n$  EM  $[a, b]$

E NÚMEROS INTEIROS NÃO NEGATIVOS  $m_0, m_1, \dots, m_n$

SEDO  $m, m = \max \{m_0, m_1, \dots, m_n\}$

◊ POLINÔMIO OSCULADOR QUE APROXIMA UMA FUNÇÃO  $f \in C^m[a, b]$  EM  $x_i$ , ONDE  $i = 0, \dots, n$ ; É O POLINÔMIO DE MENOR GRAU COM A PROPRIEDADE DE COINCIDIR COM A FUNÇÃO  $f$  E TODAS SUAS DERIVADAS DE GRAU MENOR OU IGUAL A  $m_i$  EM  $x_i$ .

SEDO ASSIM, O GRAU DESTES POLINÔMIOS OSCULADORES É DE, NO MÁXIMO:

$$M = \sum_{i=0}^n m_i + n$$

EM RESUMO, UMA FUNÇÃO OSCULADORA SE APROXIMA DE UMA CURVA COMPLEXA AO REDOR DE UM PONTO ESPECÍFICO, DE MODO QUE ELA NÃO APENAS TOQUE CURVA, MAS TAMBÉM COMPARTILHE O MAIOR NÚMERO POSSÍVEL DE DERIVADAS COM ELA NESSE PONTO.

! OSCULAR SIGNIFICA "BEIJAR". GEOMETRICAMENTE, UMA FUNÇÃO OSCULADORA "BEIJA" A CURVA ORIGINAL. !

### ENTENDENDO OS GRAUS DE CONTATO

GRAU DE CONTATO ENTRE A CURVA ORIGINAL  $f(x)$  E A FUNÇÃO OSCULADORA  $g(x)$  NO PONTO  $x=a$ .

### CONTATO ORDEM ZERO

AS FUNÇÕES SE CRUZAM OU SE TOCAM.

$$\hookrightarrow f(a) = g(a)$$

### CONTATO ORDEM UM

AS FUNÇÕES COMPARTILHAM A MESMA ROTA TANGENTE (MESMA INCLINAÇÃO).

$$\hookrightarrow f'(a) = g'(a)$$

### CONTATO ORDEM DOIS

AS FUNÇÕES COMPARTILHAM A MESMA CURVATURA

$$\hookrightarrow f''(a) = g''(a)$$

! QUANTO MAIOR A ORDEM DE CONTATO, MAIS A FUNÇÃO OSCULADORA SE MOLDA AO FORMATO DA CURVATURA ORIGINAL NAQUELE PONTO. !

### POLINÔMIOS DE HERMITE

SÃO FREQUENTEMENTE DENOTADOS POR  $H_n(x)$  OU  $He_n(x)$ , SÃO UMA SEQUÊNCIA DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS.

É DEFINIDA POR:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

→ É ORTOGONAL EM RELAÇÃO À FUNÇÃO DE PESO  $w(x) = e^{-x^2}$  NO INTERVALO  $(-\infty, \infty)$

## PRIMEIROS POLINÔMIOS

Polinômios com  $n$  PAR CONTÊM APENAS POTÊNCIAS PARES.

Polinômios com  $n$  ÍMPAR, APENAS POTÊNCIAS ÍMPARES.

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

DOIS VETORES SÃO ORTOGONAIS, SE  
ELES FORMAM UM ÂNGULO REITO ENTRE SI.

## PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

TODOS ESTES POLINÔMIOS SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI QUANDO  
INTEGRADOS EM TODO EIXO REAL COM SEU RESPECTIVO PESO.

↳ RETA REAL, UM ESPAÇO DE UMA  
ÚNICA DIMENSÃO.

$$\text{OU SEJA, } \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$$

$\delta_{mn}$  É O DELTA DE KRONECKER

↳ O RESULTADO É ZERO SE  $m \neq n$  E  
DIFERENTE DE ZERO SE  $m = n$ .

UMA PROPRIEDADE É A RECORRÊNCIA, USADA PARA COMPUTAR POLINÔMIOS  
DE FORMA EFICIENTE. PARA ISSO, NÃO USAMOS DERIVADAS, MAS SIM  
A RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA LINEAR.

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Como última propriedade, temos a equação diferencial de Hermite.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

## A INTERPOLAÇÃO

A interpolação de Hermite é uma evolução da interpolação de Lagrange.

! Útil quando temos registradas posições e velocidades de um experimento!

Com a interpolação de Lagrange, o gráfico vai passar pelos mesmos pontos, mas podem haver curvas mais artificiais.

↳ Em comparativo, a interpolação de Hermite força o polinômio a respeitar a velocidade

↳ Inclinação da reta tangente.

## Como funciona

Se você tem  $n+1$  com pontos dados por  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  e também conhece as derivadas nesses pontos,  $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$ , o polinômio de Hermite  $H_{2n+1}(x)$  será de grau máximo  $2n+1$  e deve satisfazer duas condições para cada ponto  $i$ .

1-  $H(x_i) = y_i$  (COINCIDÊNCIA DE VALOR)

2-  $H'(x_i) = y'_i$  (COINCIDÊNCIA DE INCLINAÇÃO)

! A MELHOR FORMA DE CONSTRUIR O POLINÔMIO DE HERMITE, É USANDO UMA ADAPTAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS DE NEWTON.