

Lista 5 - Pré-cálculo

NOME: Arthur P. de Aquino Pereira

RA: 25003005

5.1 FUNÇÃO INVERSA

① PARA IDENTIFICAR QUE FUNÇÕES POSSUEM INVERSA, PODEMOS APLICAR O TESTE DA LINHA HORIZONTAL.

UMA FUNÇÃO ADMITE INVERSA SE FOR BIJETORA. GRAFICAMENTE, ISSO EXIGE QUE ELA SEJA INJETORA, O QUE SIGNIFICA QUE QUALQUER RETA HORIZONTAL TRAÇADA SOBRE O GRÁFICO DE INTERCEPTA EM, NO MÁXIMO, UM ÚNICO PONTO.

MÚLTIPLOS VALORES SENDO CORTADOS PELA LINHA HORIZONTAL, SIGNIFICA VALORES DE x PARA UM MESMO y , Logo, A FUNÇÃO NÃO POSSUI INVERSA.

a) POSSUI INVERSA

b) NÃO POSSUI INVERSA

c) POSSUI INVERSA

d) NÃO POSSUI INVERSA

② PARA DETERMINAR SE UMA FUNÇÃO É INJETORA, PRECISAMOS VALIDAR A SEGUINTE CONDIÇÃO FUNDAMENTAL:

$$\text{Se } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

EM OUTRAS PALAVRAS, PARA UMA FUNÇÃO SER INJETORA, VALORES DIFERENTES DE x DEVEM SEM RESULTAR EM VALORES DIFERENTES DE y .

a) $f(x) = 6 - 5x$

↳ FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU, LINEAR.

! RETAS NÃO HORIZONTAIS SEMPRE ASSUMEM VALORES DIFERENTES DE y PARA CADA VALOR DE x

PROVA ALGÉBRICA

SUPONHA QUE $f(x_1) = f(x_2)$

$$6 - 5x_1 = 6 - 5x_2 \quad (-6)$$

$$-5x_1 = -5x_2 \quad (+5)$$

$$x_1 = x_2$$

SIM, A FUNÇÃO É INJETORA

$$b) f(x) = \frac{x}{2} - 1$$

↳ IGUA A ANTERIOR

PROVA ALGÉBRICA

$$\frac{x_1}{2} - 1 = \frac{x_2}{2} - 1 \quad (+1)$$

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \quad (\times 2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

SIM, A FUNÇÃO É INJETORA

$$c) f(x) = \sqrt{x-4}$$

↳ SENDO UMA FUNÇÃO RAIZ QUADRADA, O DOMÍNIO É RESTRIITO AOS VALORES REAIS ONDE $x \geq 4$. DENTRO DESTES DOMÍNIO, A FUNÇÃO É ESTRICTAMENTE CRESCENTE.

SIM, A FUNÇÃO É INJETORA.

d) $f(x) = 1 - x^2$

ESTA É UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA, CUJO GRÁFICO É UMA PARÁBOLA. PARÁBOLAS ASSUMEM O MESMO VALOR DE y PARA DOIS VALORES DIFERENTES DE x .

A FUNÇÃO NÃO É INJETORA.

(4)

a) $f(x) = 3x - 2$

DOMÍNIO ORIGINAL DA $f(x)$

ESTA É UMA FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU, UMA FUNÇÃO LINEAR. NÃO EXISTEM RESTRIÇÕES POR DIVISÃO OU RAÍZ.

DOMÍNIO DE $f(x) = \mathbb{R}$ (TODOS OS NÚMEROS REAIS)

ENCONTRAR A FUNÇÃO INVERSA

SUBSTITUINDO $f(x)$ POR y :

$$y = 3x - 2$$

TROCAMOS O x PELO y E O y PELO x :

$$x = 3y - 2$$

ISOLAMOS O NOVO y

$$x + 2 = 3y$$

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

FUNÇÃO INVERSA $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

DOMÍNIO DA FUNÇÃO INVERSA

A FUNÇÃO INVERSA TAMBÉM É LINEAR, Logo, NÃO POSSUI RESTRIÇÕES.

DOMÍNIO DE $f^{-1}(x) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$

DOMÍNIO DA $f(x)$

COMO TEMOS UMA RAIZ DE ÍNDICE PAR (RAIZ QUADRADA), A EXPRESSÃO DENTRO DA RAIZ NÃO PODE SER NEGATIVA.

$$x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

DOMÍNIO DE $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

ENCONTRAR A FUNÇÃO INVERSA

SUBSTITUINDO $f(x)$ POR x :

$$x = \sqrt{y+1}$$

$$x = \sqrt{y+1} \quad (^2)$$

$$x^2 = y+1$$

$$y = x^2 - 1$$

FUNÇÃO INVERSA $f^{-1}(x) = x^2 - 1$

DOMÍNIO DA FUNÇÃO INVERSA

A REGRA FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES INVERSAS É QUE O DOMÍNIO DA INVERSA É SEMPRE IGUAL A IMAGEM DA FUNÇÃO ORIGINAL.

COMO A FUNÇÃO ORIGINAL $f(x) = \sqrt{x+1}$ PRODUZ APENAS RESULTADOS POSITIVOS OU ZERO ($y \geq 0$), A NOSSA FUNÇÃO INVERSA SÓ PODE ACEITAR VALORES DE x QUE SEJAM ≥ 0 .

$$\text{DOMÍNIO DE } f^{-1}(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$g) f(x) = \frac{5}{x+1}$$

DOMÍNIO DA $f(x)$:

ESTA É UMA FUNÇÃO RACIONAL (UMA FRAÇÃO).

A PRINCIPAL REGRA É QUE O DENOMINADOR DE UMA FRAÇÃO NUNCA PODE SER IGUAL A ZERO.

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$\text{DOMÍNIO DE } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

ENCONTRANDO A FUNÇÃO INVERSA

TROCANDO x PELO y E O y PELO x

$$x = \frac{5}{y+1} \quad (x \leftrightarrow y+1)$$

$$x(y+1) = 5 \quad (/x)$$

$$y+1 = \frac{5}{x} \Rightarrow y = \frac{5}{x} - 1$$

FUNÇÃO INVERSA $f^{-1}(x) = \frac{5}{x} - 1$

DOMÍNIO DE $f^{-1}(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(5) PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA, PODEMOS USAR A PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS FUNÇÕES INVERSAS.

Se $f^{-1}(y) = x$, ENTÃO OBRIGATORIAMENTE $f(x) = y$

$$f^{-1}(14) = -2$$

DESTA FORMA, A FUNÇÃO ORIGINAL É

$$f(-2) = 14$$

BASTA SUBSTITUIR ESTES VALORES NA EXPRESSÃO GENÉRICA

$$f(x) = -5x + b$$

$$14 = -5(-2) + b$$

$$14 = 10 + b$$

$$b = 14 - 10 \Rightarrow b = 4$$

A FUNÇÃO GENÉRICA ORIGINAL É

$$f(x) = -5x + 4$$

ENCONTRANDO A $f^{-1}(x)$

$$y = -5x + 4 \rightarrow \text{INVERTENDO } x \text{ E } y$$

$$x = -5y + 4$$

$$5y + x = 4 \quad (-x)$$

$$5y = 4 - x \quad (/5)$$

$$y = \frac{4 - x}{5}$$

VALOR DA CONSTANTE: $b = 4$

$$f^{-1}(x) = \frac{4 - x}{5}$$

5.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

① As letras b e c , são a mesma função matemática escrita de formas diferentes.

Pea Propriedade das Potências, Inverter a Base de uma Fração, Troca o sinal do expoente:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = (3^{-1})^x = 3^{-x}$$

Os resultados serão idênticos.

$$f(x) = 3^{-x} \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Para $x = 0$

Qualquer número não nulo elevado a zero é igual a 1.

$$f(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$$

Para $x = -1$

O sinal negativo do expoente se multiplica com o sinal negativo do x .

$$f(-1) = 3^{-(-1)} = 3^1 = 3$$

Para $x = 1$

$$f(1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Para $x = 0,5$

Um expoente fracionário vira uma raiz. Depois, usamos o expoente negativo para inverter a base e racionalizamos o resultado.

$$f(0,5) = 3^{-0,5} \Rightarrow 3^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para $x=2$

$$f(2) = 3^{-2} \Rightarrow \frac{1}{3^2} \Rightarrow \frac{1}{9}$$

5.3 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1) A REGRA FUNDAMENTAL DOS LOGARITMOS

PARA REESCREVER AS IDENTIDADES DA IMAGEM NA FORMA EXPONENCIAL, USAMOS A DEFINIÇÃO BÁSICA DO LOGARITMO.

A REGRA:

O LOGARITMO DE UM NÚMERO É O EXPOENTE AO QUAL A BASE DEVE SER ELEVADA PARA PRODUZIR ESSE NÚMERO

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

$b \rightarrow$ É A BASE $\rightarrow$ CONTINUA SENDO A BASE

$c \rightarrow$ É O LOGARITMO $\rightarrow$ VIRA O EXPOENTE DA BASE

$a \rightarrow$ É O LOGARITMANDO $\rightarrow$ VIRA O RESULTADO DA POTÊNCIA

$$a) \log_5(125) = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$$

$$b) \log_8(32768) = 5 \Rightarrow 8^5 = 32768$$

$$c) \log_9(81) = 2 \Rightarrow 9^2 = 81$$

$$d) \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \Rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$e) \log_{256}(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow 256^{\frac{1}{4}} = 4$$

$$f) \log_7(1) = 0 \Rightarrow 7^0 = 1$$

$$g) \log\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \Rightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

↳ QUANDO NÃO POSSUI BASE, CONSIDERAMOS A BASE DECIMAL.

$$h) \log_{27}(3) = \frac{1}{3} \Rightarrow 27^{\frac{1}{3}} = 3$$

12) PARA QUALQUER FUNÇÃO NA FORMA $f(x) = \log_b(g(x))$, O LOGARITMANDO $g(x)$ DEVE SER ESTRITAMENTE MAIOR QUE ZERO ($g(x) > 0$).

EM OUTRAS PALAVRAS, O TERMO DENTRO DO LOGARITMO DEVE SER MAIOR QUE ZERO.

$$a) f(x) = \log_2(2x-5)$$

$$2x-5 > 0 (+5)$$

$$2x > 5 (/2)$$

$$x > \frac{5}{2}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$$

$$b) f(x) = \log(15-4x^2)$$

$$15 - 4x^2 > 0 \quad (-15)$$

$$-4x^2 > -15 \quad (/ -4)$$

$$x^2 > \frac{-15}{-4} \Rightarrow \frac{15}{4}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{15}}{2} < x < \frac{\sqrt{15}}{2} \right\}$$

$$x > \sqrt{\frac{15}{4}} \Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

c) $f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$

$$-x^2 + 2x + 3 > 0$$

↳ PRIMEIRO, TIRANDO AS RAÍZES

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (x-3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

POR SOMA E PRODUTO, BUSCAMOS DOIS NÚMEROS QUE SOMADOS DÃO 2 E MULTIPLICADOS DÃO -3

$$x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = 3$$

COMO A PARÁBOLA ORIGINAL POSSUI O COEFICIENTE DE x^2 NEGATIVO, ELA TEM A CONCAVIDADE VOLTADA PARA BAIXO.

ISSO SIGNIFICA QUE A FUNÇÃO É POSITIVA NO INTERVALO ENTRE AS RAÍZES.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3 \right\}$$

5.4 EQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

1)

a) $\log_2(2(x+1)(x-\frac{1}{2}))$

PARA EXPANDIR ESSA EXPRESSÃO, APLICAMOS A PROPRIEDADE DO PRODUTO
 $\log(A \cdot B \cdot C) = \log(A) + \log(B) + \log(C)$.

$$\log_2(2) + \log_2(x+1) + \log_2(x-\frac{1}{2})$$

↳ PODEMOS SIMPLIFICAR $\log_2(2) = 1$

$$1 + \log_2(x+1) + \log_2(x-\frac{1}{2})$$

b) $\log\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

PARA EXPANDIR ESSA EXPRESSÃO, APLICAMOS A PROPRIEDADE DO QUOCIENTE: $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) \Rightarrow \log_b(A) - \log_b(B)$

$$\log(x+3) - \log(x-2)$$

c) $\log_3(\sqrt[3]{x^2w})$

PARA ESTA EXPRESSÃO, USAMOS A PROPRIEDADE DA POTÊNCIA
 $\log_b(A^c) = c \cdot \log_b(A)$

$$\log_3(\sqrt[3]{x^2w})$$

$$\log_3((x^2w)^{\frac{1}{3}})$$

$$\frac{1}{3} \log_3(x^2 w) \Rightarrow \frac{1}{3} \log_3(x^2) + \frac{1}{3} \log_3(w)$$

$$2. \frac{1}{3} \log_3(x) + \frac{1}{3} \log_3(w) \Rightarrow \frac{2}{3} \log_3(x) + \frac{1}{3} \log_3(w)$$