Lista 4 - Pré-cálculo

Nome: Arthur P. de Aguiar Pereira

RA: 25003009

4.1 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

4

DADA A FUNÇÃO $f(x) = -2x^2 + 9x$

a) $f(x) = 0$

$-2x^2 + 9x = 0$

$x(-2x + 9) = 0$

$x_1 = 0$, JA QUE $0 \cdot n = 0$

NESTE CASO, $x_1 = 0$ E $x_2 = 4{,}5$

$-2x + 9 = 0 \Rightarrow -2x = -9$

$-2x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow 4{,}5$

b) $f(x) \geqslant 9$

$-2x^2 + 9x \geqslant 9$

AJUSTANTO A DESIGUALDADE PARA 0

$-2x^2 + 9x \geqslant 9\,(-9)$

$-2x^2 + 9x - 9 \geqslant 0$

TIRANDO O DELTA

$\Delta = b^2 - 4ac$

$9^2 - 4(-2)(-9)$

$81 - 72$

$\Delta = 9$

TIRANDO AS RAÍZES

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2(-2)} \Rightarrow \frac{-9 \pm 3}{-4}$

$x_1 = \frac{-9+3}{-4} = \frac{-6}{-4} = 1{,}5$

$x_2 = \frac{-9-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

COMO $a=-2$ É NEGATIVO, A PARÁBOLA TEM CONCAVIDADE PARA BAIXO.
ELA CRUZA O EIXO x EM 1,5 E 3.
A PARTE DA PARÁBOLA QUE É MAIOR OU IGUAL A ZERO, ESTÁ ENTRE ESSAS DUAS RAÍZES.
↳ ACIMA DO EIXO x

A SOLUÇÃO DA INEQUAÇÃO É O INTERVALO REAL $[1,5; 3]$.

$$S=\{x\in\mathbb{R} \mid 1,5\leq x\leq 3\}$$

c) COMO O COEFICIENTE DE x^2 NA FUNÇÃO $f(x)=-2x^2+9x$ É NEGATIVO, $a=-2<0$. SENDO ASSIM, A PARÁBOLA TEM CONCAVIDADE VIRADA PARA BAIXO. DESTA FORMA, A FUNÇÃO POSSUI UM PONTO MÁXIMO.

A COORDENADA DO VÉRTICE (x_v, y_v) É DADA POR:

$$x_v=\frac{-b}{2a} \text{ e } y_v=f(x_v)$$

$$x_v=\frac{-9}{2(-2)} \Rightarrow \frac{-9}{-4} \Rightarrow \frac{9}{4}=2,25$$

$$y_v=f(x_v) \Rightarrow -2\left(\frac{9}{4}\right)^2+9\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow -2\left(\frac{81}{16}\right)+\frac{81}{4}$$

$$-2\left(\frac{81}{16}\right)+\frac{81}{4} \Rightarrow -\frac{162}{16}+\frac{81}{4} \Rightarrow -\frac{162}{16}(\div 2)=-\frac{81}{8}$$

$$-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}=\frac{-81+162}{8} \Rightarrow \frac{81}{8}=10,125$$

↳ $MMC(8,4)=8$

⑦

a) $f(x) = (x-1)(x+2)$

EXPANDINDO A EXPRESSÃO

$(x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2$

$a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

COMO $a = 1 > 0$, A PARÁBOLA TEM A CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA. PORTANTO, A FUNÇÃO POSSUI UM PONTO MÍNIMO.

PONTO MÍNIMO

$x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow \dfrac{-1}{2(1)} \Rightarrow \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$

$y_v = f(x_v) \Rightarrow f(-0{,}5) = (-0{,}5-1)(-0{,}5+2) = -1{,}5 \cdot 1{,}5 \Rightarrow -2{,}25$

O PONTO MÍNIMO É $(-0{,}5; -2{,}25)$

d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

COMO $a = -2 < 0$, A CONCAVIDADE DA PARÁBOLA É VOLTADA PARA BAIXO. EM OUTRAS PALAVRAS, POSSUI PONTO MÁXIMO.

$x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow \dfrac{-3}{2(-2)} \Rightarrow \dfrac{-3}{-4} = 0{,}75$

$y_v =$ PARA ENCONTRAR O y_v, PODEMOS USAR A FÓRMULA DISCRIMINANTE:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4(a)}$

$\Delta = (3)^2 - 4(-2)(2)$

$\Delta = 9 + 16 \Rightarrow 25$

AGORA APLICANDO O $-\Delta$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{-25}{4(-2)} \Rightarrow \frac{-25}{-8} \Rightarrow \frac{25}{8} = 3,125$

O PONTO MÁXIMO É $(0,75; 3,125)$

f) $f(x) = -x^2 - 4$

↳ ESTA É UMA FUNÇÃO INCOMPLETA ONDE $b = 0$

COMO $a = -1 < 0$, A CONCAVIDADE É VOLTADA PARA BAIXO.
DESTA FORMA, A FUNÇÃO POSSUI UM PONTO MÁXIMO.

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{-2} = 0$

O PONTO MÁXIMO DO GRÁFICO É $(0, -4)$

$y_v = f(0) = -0^2 - 4 = -4$

8) PARA ENCONTRAR A EQUAÇÃO DE UMA PARÁBOLA, QUANDO CONHECEMOS AS COORDENADAS DO VÉRTICE (x_v, y_v):

$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

↳ ONDE a É O COEFICIENTE REAL QUE DETERMINA A ABERTURA E O SENTIDO DA CONCAVIDADE.

a) VÉRTICE EM $(1, -2)$ E PASSA POR $(2, 3)$

$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 - 2$

DETERMINANDO O VALOR DE a DADO O PONTO $(2,3)$

$x = 2$

$f(x) = a(2-1)^2 - 2 \Rightarrow f(x) = a(1)^2 - 2 \Rightarrow f(x) = a - 2$

COMO RESULTADO DE $f(2)=3$, ENTÃO:

$3=a-2(+2)$

$3+2=a \Rightarrow a=5$

AGORA, A FUNÇÃO NA FORMA CANÔNICA

$f(x)=5(x-1)^2-2$

↳ FORMA GERAL: $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)=5(x^2-2x+1)-2$

$f(x)=5x^2-10x+5-2$

$f(x)=5x^2-10x+3$

b) VÉRTICE EM $(3,4)$, CRUZA O EIXO-y NA ORDENADA -5

COORDENADAS DO VÉRTICE $(x_v, y_v) \Rightarrow (3,4)$

$f(x)=a(x-x_v)^2+y_v \Rightarrow f(x)=a(x-3)^2+4$

COMO $f(x)$ PASSA PELA ORDENADA -5, TEMOS $f(0)=-5$

$f(x)=a(x-3)^2+4 \Rightarrow -5=a(0-3)^2+4$

$-5=a(0-3)^2+4 \Rightarrow -5=a(-3)^2+4$

$-5=9a+4$

$-5-4=9a$

$-9=9a \Rightarrow a=\frac{-9}{9}$

$a=-1$

↳ CONCAVIDADE VOLTADA PARA BAIXO

FUNÇÃO FINAL

$f(x)=-1(x-3)^2+4$

$f(x)=-1(x^2-6x+9)+4$

$f(x)=-x^2+6x-9+4$

$f(x)=-x^2+6x-5$

(9)

a) $y \geq x^2$

FRONTEIRA: É A PARÁBOLA PADRÃO $y = x^2$, QUE TEM O VÉRTICE NA ORIGEM $(0,0)$ E A CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA.
REGIÃO: O SINAL $\geq$ INDICA TODOS OS PONTOS ONDE O VALOR DE y É SUPERIOR OU IGUAL AO VALOR DA PARÁBOLA.
PODEMOS CONFIRMAR COM $(0,2) \Rightarrow 2 \geq 0^2 \Rightarrow 2 \geq 0$
↳ UMA AFIRMAÇÃO VERDADEIRA

b) $y = x^2 - 4$

ESTA É A PARÁBOLA PADRÃO DESLOCADA 4 UNIDADES PARA BAIXO.
VÉRTICE: $(0, -4)$
RAÍZES: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

c) $y \leq 4 - x^2$

A PARÁBOLA É $y = -x + 4$, ONDE $-x^2 < 0$, A CONCAVIDADE É VOLTADA PARA BAIXO.
ASSIM COMO NA LETRA b), SUAS RAÍZES SÃO $x = 2$ E $x = -2$.

4.2 DIVISÃO POR POLINÔMIOS

(1) UTILIZANDO O MÉTODO DA DIVISÃO LONGA, O OBJETIVO É ENCONTRAR O QUOCIENTE $q(x)$ E O RESTO $r(x)$ A CADA CASO.

! SE UM TERMO FALTAR POLINÔMIOS, PREENCHEMOS COM $0x$!

c) $(x^4 + 2x - 12) / (x + 2)$

APLICANDO $0x$ NOS TERMOS FALTANTES

$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 12$

EFETUANDO A DIVISÃO

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 12 & x+2 \\
\hline
-(x^4 + 2x^3) & x^3 - 2x^2 + 4x - 6 \\
\hline
0 \quad -2x^3 + 0x^2 & \\
\quad 2x^3 + 4x^2 & \\
\hline
\quad 0 \quad 4x^2 + 2x & \\
\quad -(4x^2 + 8x) & \\
\hline
\quad\quad 0 \quad -6x - 12 & \\
\quad\quad\quad 6x + 12 & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

QUOCIENTE: $x^3 - 2x^2 + 4x - 6$

RESTO ZERO

m) $(2x^4 - 4x^3 + x - 17) / (x^2 - 4)$

COMPLETANDO OS TERMOS

$2x^4 - 4x^3 + 0x^2 + x - 17$

EFETUANDO A DIVISÃO

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 4x^3 + 0x^2 + x - 17 & x^2 - 4 \\
\hline
-2x^4 - 0x^3 + 8x^2 & 2x^2 - 4x + 8 \\
\hline
0 - 4x^3 + 8x^2 + x & \\
\quad 4x^2 - 0x^2 - 16x & \\
\hline
\quad 0 + 8x^2 - 15x - 17 & \\
\quad\quad -8x^2 - 0x + 32 & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 - 15x + 15 &
\end{array}
$$

$2x^2(x^2 - 4) \Rightarrow 2x^4 - 8x^2$

É NECESSÁRIO ALINHAR AS POTÊNCIAS

$2x^4 + 0x^3 - 8x^2$

QUOCIENTE: $2x^2 - 4x + 8$

RESTO: $-15x + 15$

O RESTO $-15x + 15$ É MENOR QUE O GRAU DO DIVISOR $x^2 - 4$. PARAMOS A DIVISÃO.

(2)

FORMA DA RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA DIVISÃO

DIVIDENDO = DIVISOR . QUOCIENTE + RESTO

OU

$p(x) = d(x) . q(x) + r(x)$

c) $x^4 + 2x - 12 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 6) + 0$

f) $4x^3 + 6x - 10 = (2x - 4)(2x^2 + 4x + 11) + 34$

i) $x^4 - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) - 1$

m) $2x^4 - 4x^3 + x - 17 = (x^2 - 4)(2x^2 - 4x + 8) + (-15x + 15)$

4.3 ZEROS REAIS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

(1) O TEOREMA DO FATOR É UMA CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA DO RESTO. SE UM BINÔMIO DA FORMA $(x-r)$ É UM FATOR DE UM POLINÔMIO $p(x)$, ENTÃO r É UMA RAIZ DO POLINÔMIO.

OU SEJA, SE SUBSTITUIRMOS x POR r, O RESULTADO TEM DE SER ZERO: $p(r)=0$.

a) $p(x) = x^2 - 9x + c$. FATOR: $x-8$

SE O FATOR É $x-8$, IGUALAMOS A ZERO PARA ENCONTRAR A RAIZ.

$x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

PORTANTO, TEMOS DE GARANTIR QUE $p(8) = 0$

SUBSTITUIR O VALOR DE x NO POLINÔMIO E IGUALAR A ZERO.

$p(8) = 8^2 - 9(8) + c = 0$

$= 64 - 72 + c \Rightarrow -8 + c = 0$

$c = 8$

O VALOR DA CONSTANTE É 8

b) $p(x) = 5x^2 + cx + 9$. FATOR: $x+3$

IGUALANDO A ZERO PARA ENCONTRAR A RAÍZ

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

GARANTINDO PARA QUE $p(-3)=0$

$p(-3) = 5(-3)^2 + c(-3) + 9 = 0$

$5(9) - 3c + 9 = 0$

$45 - 3c + 9 = 0 \Rightarrow 54 - 3c = 0$

$54 = 3c$

$c = \frac{54}{3} \Rightarrow c = 18$

O VALOR DA CONSTANTE É 18

2) PARA ISSO BASTA COLOCAR OS TERMOS COMUNS EM EVIDÊNCIA, E FATORAR O RESTANTE.

a) $x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

A EXPRESSÃO $x^2 - 4 = 0$ É UMA DIFERENÇA DE QUADRADOS, DESSA FORMA FATORAMOS COMO $(x-a)(x+a)$

Como $4 = 2^2$

$x(x-2)(x+2) = 0$

DETERMINANDO AS RAÍZES

PARA QUE O PRODUTO SEJA ZERO, PELO MENOS UM DOS FATORES TEM DE SER ZERO:

$x=0$; $x=2$; $x=-2$

c) $2x^3 + 11x^2 - 6x = 0$

$x(2x^2 + 11x - 6) = 0$

RESOLVENDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA $2x^2 + 11x - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (11)^2 - 4(2)(-6)$

$\Delta = 121 + 48 \Rightarrow \Delta = 169$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2.2} \Rightarrow \frac{-11 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{-11+13}{4} \Rightarrow \frac{2}{4}(/2) \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-11-13}{4} \Rightarrow \frac{-24}{4} \Rightarrow -6$$

A FORMA FATORADA DE UM POLINÔMIO DO SEGUNDO GRAU $ax^2 + bx + c$ É $a(x-x_1)(x-x_2)$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-(-6)) \Rightarrow (2x-1)(x+6)$$

FORMA FATORADA

$x(2x-1)(x+6)$

RAÍZES

$x=0;\ x=\frac{1}{2};\ x=-6$

l) $x^4-x^3-20x^2=0$

FATOR EM COMUM EM EVIDÊNCIA

$x^2(x^2-x-20)=0$

DAQUI TEMOS A RAIZ $x^2=0$, O QUE NOS DÁ A RAIZ $x=0$

TIRANDO A RAIZ

PODEMOS RESOLVER POR SOMA E PRODUTO, PRECISAMOS DE DOIS NÚMEROS QUE JUNTOS:

- SOMADOS DEEM 1
- MULTIPLICADOS DEEM -20

ESTES NÚMEROS SÃO 5 E -4

FORMA FATORADA

$(x-x_1)(x+x_2) \Rightarrow (x-5)(x+4)$

FORMA FATORADA

$x^2(x-5)(x+4)=0$

RAÍZES

$x=-4;\ x=0;\ x=5$

(5)

a) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$w = x^2$

↳ Como $x^4 = (x^2)^2$, PODEMOS REPRESENTAR COMO w^2.

$w^2 - 13w + 36 = 0$

RESOLVENDO POR SOMA E PRODUTO, DOIS NÚMEROS QUE:

- SOMADO DEEM 13 → VALOR DE $-b$
- MULTIPLICADOS DEEM 36 → VALOR DE c

$w_1 = 9$ e $w_2 = 4$

DESFAZENDO A MUDANÇA DE VARIÁVEIS

$w = 9$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = 3$ OU $x = -3$

$w = 4$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2$ OU $x = -2$

OS ZEROS DA FUNÇÃO SÃO:

$-3 ; -2 ; 2 ; 3$

4.4 GRÁFICOS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

(1)

a) PODE REPRESENTAR UMA FUNÇÃO POLINOMIAL? NÃO.
FUNÇÕES POLINOMIAIS NÃO APRESENTAM PONTOS ANGULOSOS

b) PODE REPRESENTAR UMA FUNÇÃO POLINOMIAL? NÃO.
O GRÁFICO APRESENTA UMA DESCONTINUIDADE, AS FUNÇÕES POLINOMIAIS SÃO CONTÍNUAS EM TODA A SUA EXTENSÃO

c) PODE REPRESENTAR UMA FUNÇÃO POLINOMIAL? SIM.
UMA CURVA PERFEITAMENTE CONTÍNUA E SUAVE. NÃO TEM QUEBRAS, BURACOS OU PONTOS ANGULOSOS.

d) PODE REPRESENTAR UMA FUNÇÃO POLINOMIAL? SIM.
O GRÁFICO É UMA RETA CONTÍNUA, CARACTERÍSTICA DE UM POLINÔMIO DE GRAU 1.

(2)

a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$
GRAU: 3 (ÍMPAR)
COEFICIENTE PRINCIPAL: 1 (POSITIVO)
CORRESPONDE AO GRÁFICO IV

b) $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 6$
GRAU: 3 (ÍMPAR)
COEFICIENTE PRINCIPAL: -2 (NEGATIVO)
CORRESPONDE AO GRÁFICO II

c) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 4$

GRAU: 4 (PAR)

COEFICIENTE PRINCIPAL: 1 (POSITIVO)

CORRESPONDE AO GRÁFICO I

d) $f(x) = 1 - 4x^2 - 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 - x^6$

REORGANIZANDO A FUNÇÃO POR ORDEM DE GRAU

$f(x) = -x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$

GRAU: 6 (PAR)

COEFICIENTE PRINCIPAL: -1 (NEGATIVO)

CORRESPONDE AO GRÁFICO III

a) → IV

b) → II

c) → I

d) → III