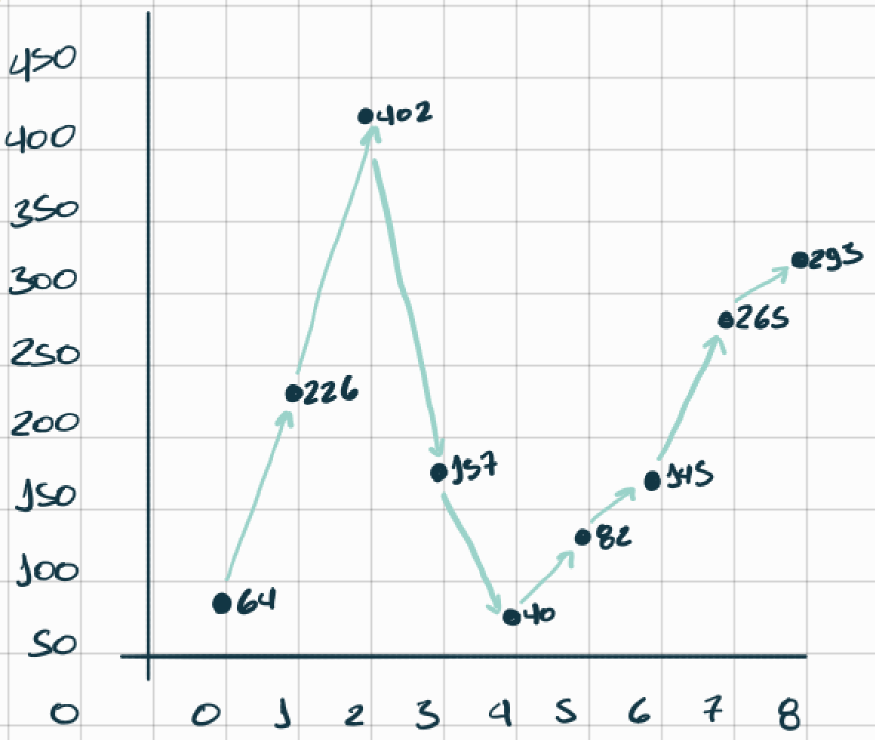
LISTA 3 - PRÉ-CALCULO

NOME: ARTHUR P. DE AGUIAR PEREIRA

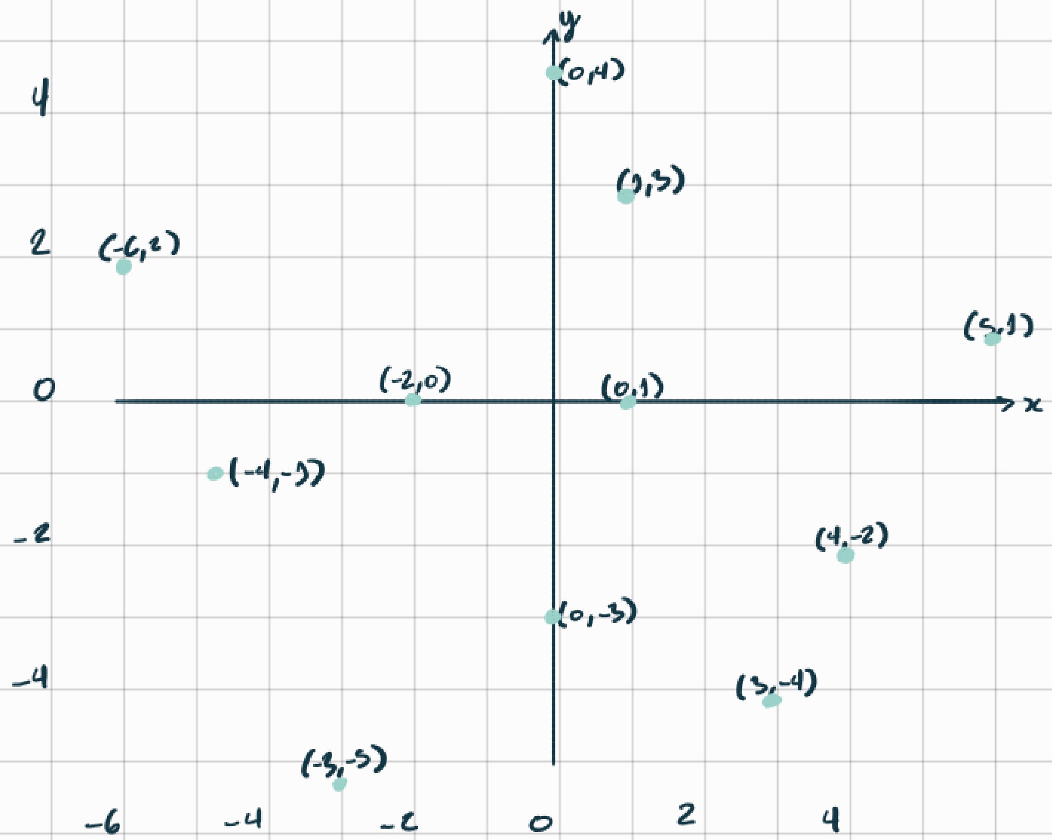
RA: 25003009

3.1: COORDENADAS NO PLANO

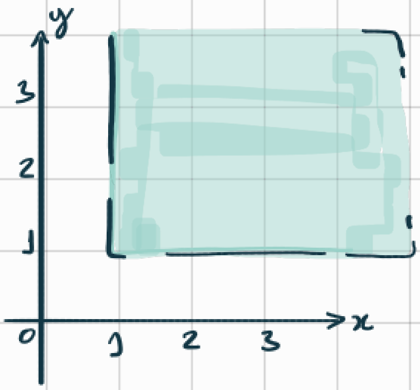
(2)



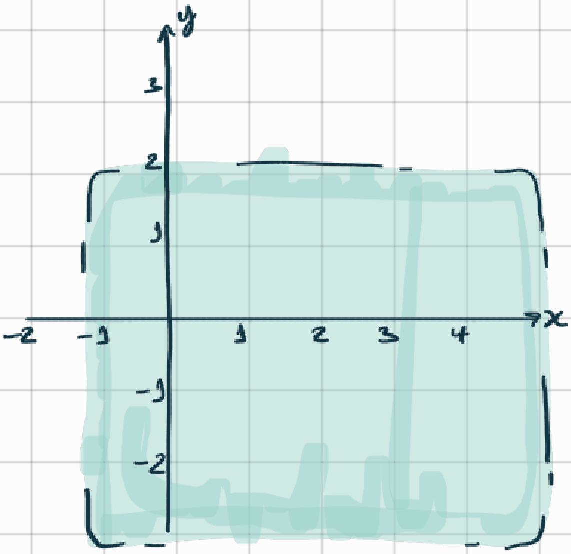
(6)



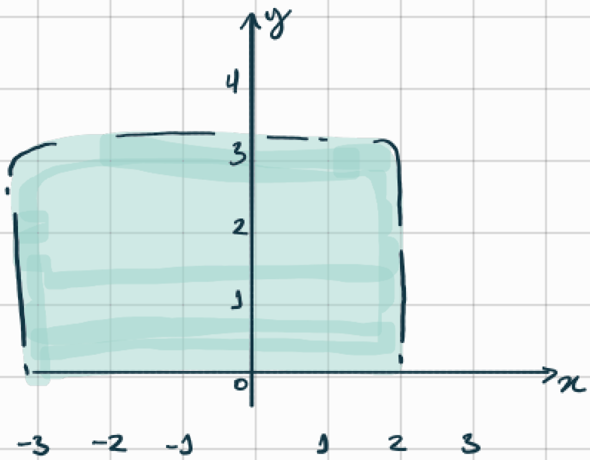
② a) $x \geq 1$ e $y \geq 1$



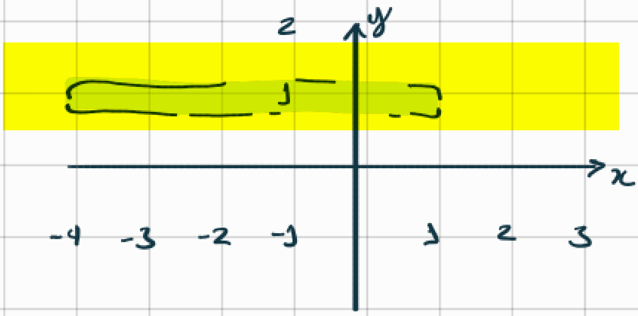
b) $x \geq -1$ e $y \leq 2$



c) $-3 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 3$



d) $-4 \leq x \leq 1$ e $y = 1$



3.2: EQUAÇÕES NO PLANO

③

b) $3y - 2x + 3 = 0,\ x \in [-2, 4]$

$$3y = 2x - 3$$

$$y = \frac{2x-3}{3} \Rightarrow \frac{2x}{3} - 1 \Rightarrow \frac{2}{3}x - 1$$

TABELA DE PARES $[-2, 4]$

$-2 \to -2{,}33$

$-1 \to -1{,}67$

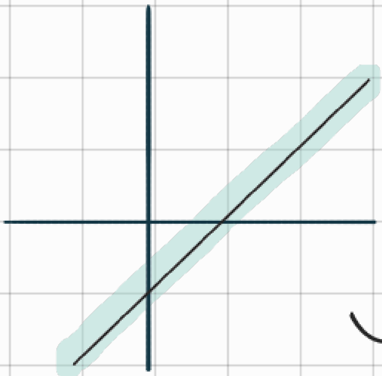
$0 \to -1$

$1 \to -0{,}33$

$2 \to 0{,}33$

$3 \to 1$

$4 \to 1{,}67$



FUNÇÃO LINEAR

d) $y = x^2 - 1, \quad x \in [-2, 2]$

TABELA DE PARES $[-2, 2]$

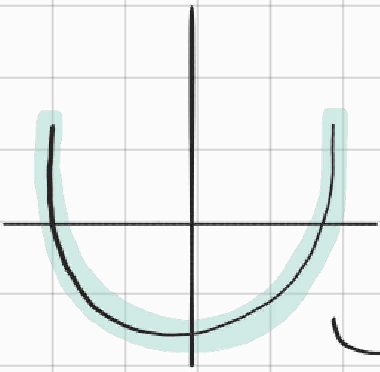
$-2 \to 3$

$-1 \to 0$

$0 \to -1$

$1 \to 0$

$2 \to 3$



FUNÇÃO QUADRÁTICA

(4)

b) $y = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 4]$

FUNÇÃO RAIZ QUADRADA

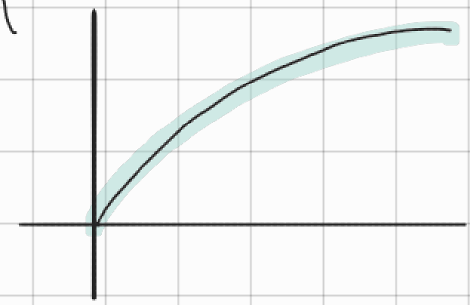


TABELA DE PARES $[0, 4]$

$0 \to 0$

$1 \to 1$

$2 \to \approx 1{,}41$

$3 \to \approx 1{,}73$

$4 \to 2$

d) $y = \frac{1}{x}$ e $x \in [-4, 4]$

A FUNÇÃO POSSUI UMA INDETERMINAÇÃO EM $x=0$, POIS $\frac{n}{0}$ = INDETERMINADO.
NÃO CONSIDERAREI $x=0$ COMO PARTE DO DOMÍNIO.

TABELA DE PARES [-4, 4]

$-4 \rightarrow -0,25$

$-3 \rightarrow -0,5$

$-2 \rightarrow -1,0$

$-1 \rightarrow -2,0$

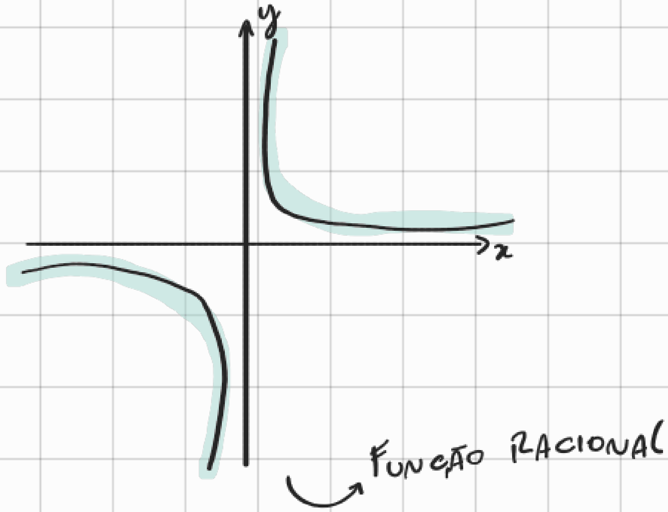
$0 \rightarrow$ INDETERMINAÇÃO

$1 \rightarrow 2,0$

$2 \rightarrow 1,0$

$3 \rightarrow 0,5$

$4 \rightarrow 0,25$



7

a) TODA EQUAÇÃO TEM UM INTERCEPTOR $-x$

FALSA.

UM INTERCEPTOR-x É O PONTO ONDE A CURVA CRUZA OU TOCA O EIXO HORIZONTAL ($y=0$). EXISTEM MUITAS EQUAÇÕES QUE NUNCA TOCAM O x.
O CONTRA EXEMPLO MAIS SIMPLES É UMA RETA HORIZONTAL QUE NÃO SEJA O PRÓPRIO EIXO x, COMO $y=2$, OU UMA PARÁBOLA TOTALMENTE ACIMA DO EIXO x, COMO $y = x^2+1$.

b) TODA EQUAÇÃO TEM UM INTERCEPTOR $-y$

FALSA.

UM INTERCEPTO-y OCORRE ONDE A CURVA CRUZA O EIXO VERTICAL ($x=0$). SE UMA EQUAÇÃO NÃO ESTIVER DEFINIDA PARA $x=0$, ELA NÃO TERÁ INTERCEPTO-y.

UM EXCELENTE CONTRA EXEMPLO É A FUNÇÃO RACIONAL QUE É DADA POR $y = \frac{1}{x}$, OU UMA RETA VERTICAL COMO $x = 3$.

(g)

PARA O INTERCEPTO DO EIXO x

↳ SUBSTITUÍMOS A VARIÁVEL y POR 0, PARA ENCONTRAR O VALOR DE x

PARA O INTERCEPTO DO EIXO y

↳ SUBSTITUÍMOS A VARIÁVEL x POR 0, PARA ENCONTRAR O VALOR DE y

a) $8y^2 - x = 2$

$8(0)^2 - x = 2 \Rightarrow -x = 2$

$-x = 2 \; (x-1) \Rightarrow x = -2$

PONTO DE INTERCEPTO-x: $(-2, 0)$

$8y^2 - 0 = 2 \Rightarrow 8y^2 = 2$

ISOLANDO O y^2

$y^2 = \frac{2}{8} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}$

EXTRAINDO A RAIZ

$y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{1}{2}$ OU $\pm 0{,}5$

PONTO DE INTERCEPTO-y: $(0; 0{,}5)$

c) $(4-x^2-y^2)^3 = 100x^2y^2$

$(4-x^2-0^2)^3 = 100x^2(0^2)$

↳ ZERA COMPLETAMENTE

$(4-x^2)^3 = 0$

↳ TIRANDO RAÍZ CÚBICA DE AMBOS OS LADOS

$\sqrt[3]{(4-x^2)^3} = \sqrt[3]{0}$

$4-x^2=0$

$x^2=4$

EXTRAÍNDO A RAÍZ QUADRADA

$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \pm 2$

PONTOS DE INTERCEPTO-x: $(2,0)$ e $(-2,0)$

$(4-0^2-y^2)^3 = 100(0^2)y^2$

↳ ZERA COMPLETAMENTE

$(4-y^2)^3 = 0$

↳ RAÍZ CÚBICA EM AMBOS OS LADOS

$4-y^2=0$

$y^2=4$

EXTRAÍNDO A RAÍZ

$y = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \pm 2$

PONTOS DE INTERCEPTO-y: $(0,2)$ e $(0,-2)$

3.3 SOLUÇÃO GRÁFICA

5. PARA ISSO, DEVEMOS ENCONTRAR OS PONTOS ONDE AS FUNÇÕES $y_1 = x^2$ e $y^2 = x+2$ SE INTERCEPTAM NO INTERVALO $x \in [-3,3]$.

$f(x) = x^2$

↳ UMA PARÁBOLA COM VÉRTICE NA ORIGEM.

$g(x) = x+2$

↳ UMA RETA COM INCLINAÇÃO 1 E INTERCEPTO EM 2.

IGUALANDO A FUNÇÃO PARA RESOLUÇÃO

$x^2 = x+2$

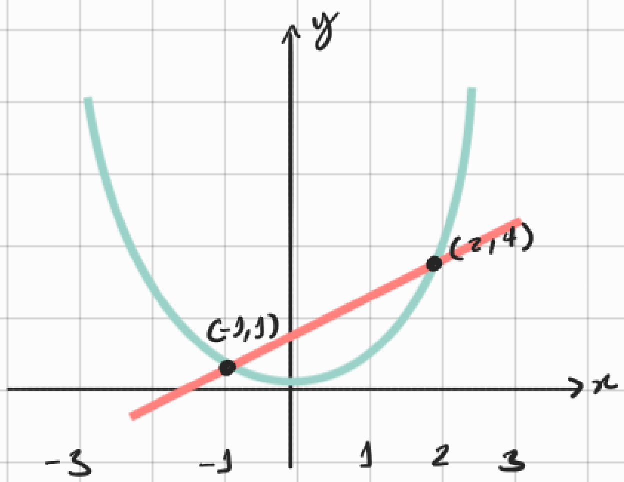
$x^2 - x - 2 = 0$

BUSCANDO POR DOIS NUMEROS QUE SOMADOS DÃO 1

E MULTIPLICADOS DÃO -2

$(x-2)(x+1) = 0$

SOLUÇÃO ⇒ $x = 2$ E $x = -1$



⑧ TRADUZINDO PARA FUNÇÕES DE CUSTO

TRANSPORTE POR TREM (C_t)

R$ 8,00 x 500 TONELADAS ⇒ 4.000

Km POR TONELADA R$ 0,015 x 500 TONELADAS ⇒ 7,5 POR Km

FUNÇÃO $C_t(x) = 7{,}5x + 4.000$

TRANSPORTE POR CAMINHÕES (C_c)

R$ 125,00 x 25 CAMINHÕES ⇒ 3.125

Km POR CAMINHÃO R$ 0,50 x 25 CAMINHÕES ⇒ 12,5 POR Km

FUNÇÃO $C_c(x) = 12{,}5x + 3.125$

DETERMINANDO O INTERVALO

PARA DETERMINAR O MAIS VANTAJOSO, BASTA: $C_t(x) < C_c(x)$

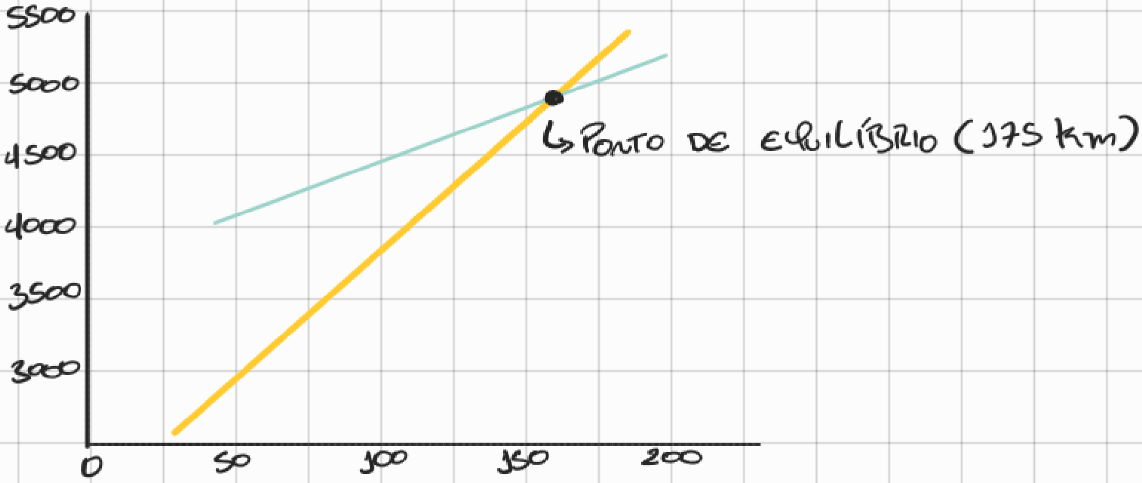
$7{,}5x + 4.000 < 12{,}5x + 3.125$

$4.000 - 3.125 < 12{,}5x - 7{,}5x$

$875 < 5x$

$x > \frac{875}{5} \Rightarrow x > 175 \text{ km}$

O TRANSPORTE POR TREM É MAIS VANTAJOSO QUANDO A DISTÂNCIA É SUPERIOR A 175km



9

b) $6 - 4x \geq 0$

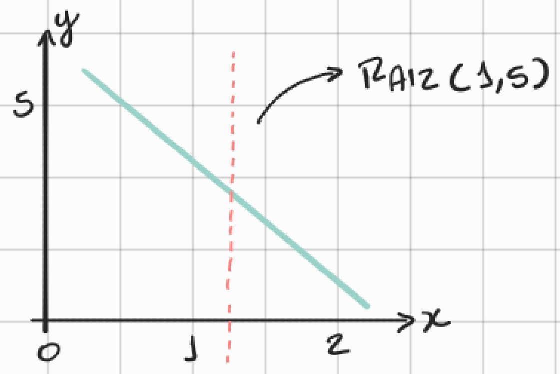
$f(x) = 6 - 4x$

RAIZ: $6 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow 1{,}5$

COMO O COEFICIENTE DE x É NEGATIVO, A RETA DECRESCENTE.

PORTANTO, A FUNÇÃO É MAIOR OU IGUAL A ZERO À ESQUERDA DA RAIZ.

Solução: $x \leq 1{,}5$



e) $\frac{x+3}{2} \geq 6 - x$

$f(x) = \frac{x+3}{2} - (6-x) \geq 0$

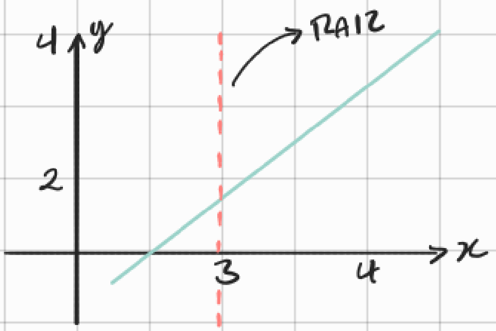
SIMPLIFICANDO

$f(x) = 0,5x + 1,5 - 6 + x = 1,5x - 4,5$

RAIZ $= 1,5x - 4,5 = 0 \Rightarrow 1,5x = 4,5 \Rightarrow x = 3$

COMO A INCLINAÇÃO É POSITIVA, A RETA É CRESCENTE E A FUNÇÃO É MAIOR OU IGUAL A ZERO À DIREITA DA RAIZ

SOLUÇÃO: $x \geq 3$



11

a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

$f(x) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

BUSCANDO AS RAÍZES DA FUNÇÃO ASSOCIADA

POR FATORAÇÃO, BASTA PROCURAR NOS DOIS NÚMEROS QUE SOMADOS DÃO -2 E MULTIPLICADOS DÃO -3

$(x+3)(x-1)=0$

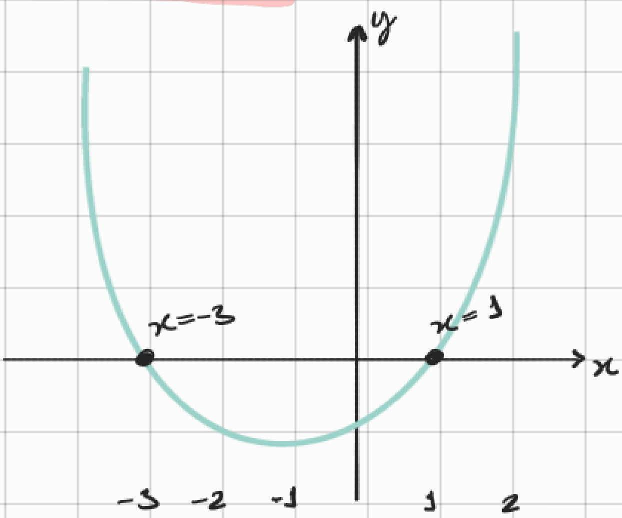
RAÍZES: $x=-3$ E $x=1$

COMO x^2 É POSITIVO, A PARABOLA TEM A CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA

↳ A FUNÇÃO ASSUME VALORES NEGATIVOS ENTRE AS DUAS RAÍZES

COMO A INEQUAÇÃO PEDE VALORES MENORES OU IGUAIS A ZERO (≤ 0) O CONJUNTO SOLUÇÃO É DADO POR:

$-3 \leq x \leq 1$



3.4 RETAS NO PLANO

1) PARA ENCONTRAR A INCLINAÇÃO (m) DE UMA RETA, PARTINDO DO SEU GRÁFICO, BASTA UTILIZAR A TAXA DE VARIAÇÃO ENTRE DOIS PONTOS CONHECIDOS.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ANÁLISE DAS RETAS

RETA VERMELHA (DECRESCENTE)

$$m = \frac{-1-2}{1-0} = \frac{-3}{1} = -3$$

RETA CINZA (CRESCENTE)

$$m = \frac{1-(-1)}{3-0} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

(2)

a) $(\overset{x_1}{4},\underset{y_1}{1})$ e $(\underset{x_2}{2},\overset{y_2}{3})$ $\Rightarrow m = \frac{3-1}{2-4} \Rightarrow m = \frac{2}{-2} \Rightarrow m = -1$

A INCLINAÇÃO DA RETA QUE PASSA PELOS PONTOS $(4,1)$ e $(2,3)$ É -1

(3) PARA ESCREVER A EQUAÇÃO DE UMA RETA COM BASE EM SUA INCLINAÇÃO E O INTERCEPTO COM O EIXO y, BASTA USARMOS A FORMA REDUZIDA DA EQUAÇÃO DA RETA:

$y = mx + b$

↳ b É O INTERCEPTO-y (COEFICIENTE LINEAR)

↳ m É A INCLINAÇÃO (COEFICIENTE ANGULAR)

b) INTERCEPTO-y $(b) = 2$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{3}{4}x + 2$

INCLINAÇÃO $(m) = -\frac{3}{4}$

EQUAÇÃO GERAL

$$y = -\frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow 4y = -3x + 8 \Rightarrow 3x + 4y + 8 = 0$$

4) PARA DETERMINAR A EQUAÇÃO DA RETA COM BASE NA INCLINAÇÃO m E UM PONTO POR ONDE ELE PASSA $P(x_0, y_0)$, BASTA UTILIZAR A EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

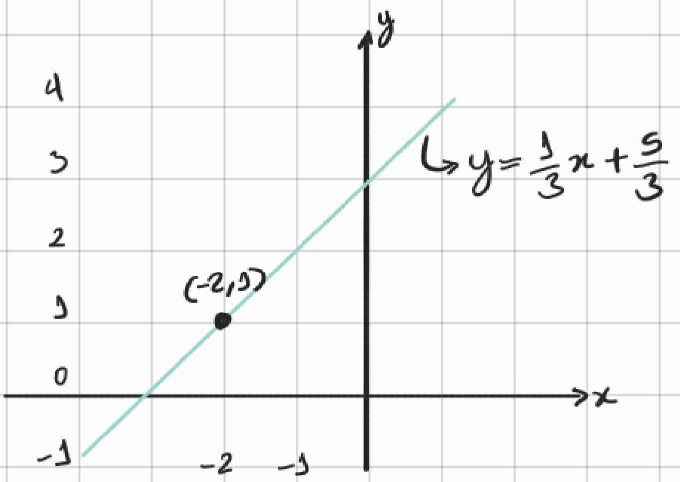
c) PONTO $(-2, 1) \Rightarrow x_0 = -2$ E $y_0 = 1$

INCLINAÇÃO $m = \frac{1}{3}$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - (-2)) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 1 \Rightarrow \frac{2}{3} + 1 = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$



5)

d)

INTERCEPTA O EIXO-y NA ORDENADA 3:

QUANDO $x = 0$, $y = 3 \Rightarrow (0, 3)$, NA EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA $y = mx + b$ O VALOR DE b É $b = 3$

INTERCEPTA O EIXO-x NA ABSCISSA -2:

QUANDO $y=0,\ x=-2 \Rightarrow (-2,0)$

DETERMINANDO INCLINAÇÃO (m)

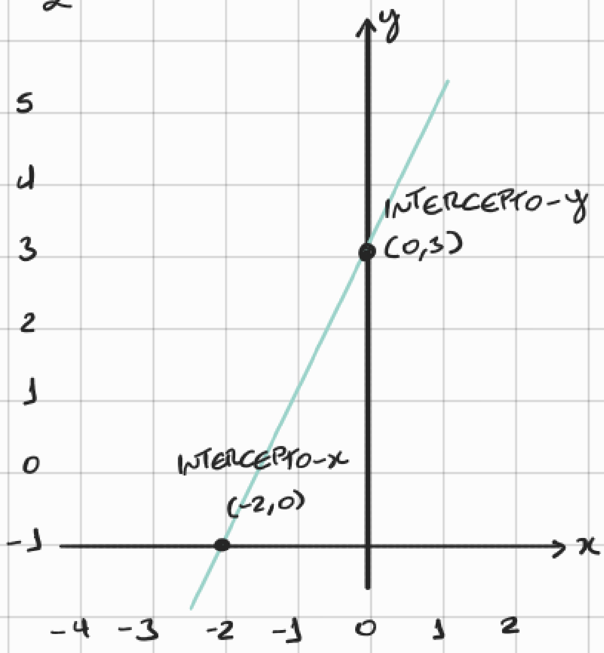
USANDO A FÓRMULA DO COEFICIENTE ANGULAR COM $P_1(-2,0)$ E $P_2(0,3)$:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-0}{0-(-2)}=\frac{3}{2}$$

EQUAÇÃO DA RETA

$m=\frac{3}{2}$ E $b=3$ NA FORMA $y=mx+b$

$$y=\frac{3}{2}x+3 \Rightarrow 2y=3x+6 \Rightarrow 3x-2y+6=0$$



(6) PARA ENCONTRAR A EQUAÇÃO DE UMA RETA ($y=mx+b$), É NECESSÁRIO IDENTIFICAR A INCLINAÇÃO (m) E O PONTO ONDE ELE CRUZA O EIXO y.

RETA VERMELHA

INCLINAÇÃO

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-4}{4-0}=\frac{-2}{4}=-0,5$$

EQUAÇÃO DA RETA

$y = -0,5x + 4$

RETA CINZA

INCLINAÇÃO DA RETA

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{0-(-1)} = \dfrac{2}{1} = 2$

EQUAÇÃO DA RETA

$y = 2x + 3$

3.5 FUNÇÕES

(2) PARA QUE UMA FUNÇÃO DE x SEJA DEFINIDA POR y, CADA VALOR DE x DEVE CORRESPONDER EXATAMENTE UM ÚNICO VALOR DE y.

a) $12 - 2y = 0$

$-2y = -12 \ (x-1)$

$2y = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12}{2} \Rightarrow y = 6$

PERMITE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

c) $x - y^2 + 4 = 0$

$-y^2 = x - 4 \ (x-1)$

$y^2 = x + 4$

$y = \pm\sqrt{x+4}$

NÃO PERMITE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.

PELO SINAL DE $\pm$, CADA VALOR $x > -4$, GERA DOIS VALORES DIFERENTES PARA CADA y.

e) $(x-3)^2 + y = x^2$

$y = x^2 - (x-3)^2$

DESENVOLVENDO O PRODUTO NOTÁVEL

$y = x^2 - (x^2 - 6x + 9)$

$y = 6x + 9$

PERMITE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

③

g) $f(x) = \sqrt{5-2x}$

↳ DENTRO DE UMA RAÍZ DEVE-SE SER MAIOR OU IGUAL A ZERO.

$5-2x \geqslant 0$

$-2x \geqslant -5 \;(\times -1)$

$2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 2{,}5$

DOMÍNIO $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2{,}5\}$ ou $(-\infty; 2{,}5]$

h) $f(x) = \dfrac{5x}{5x-13}$

↳ O DENOMINADOR DE UMA FRAÇÃO, NUNCA PODE SER ZERO

$5x - 13 \neq 0$

$5x \neq 13 \Rightarrow x \neq \frac{13}{5} \Rightarrow 2{,}6$

DOMÍNIO $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2{,}6\}$ ou $\mathbb{R} - \{2{,}6\}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x+1}$ → MAIOR OU IGUAL A ZERO

↳ DENOMINADOR DIFERENTE DE ZERO

$3 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3 \;(\times -1) \Rightarrow x \leq 3$

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

DOMÍNIO $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ e } x \neq -1\}$ ou $(-\infty, -1) \cup (-1, 3]$

p) $f(x) = \dfrac{1}{|x-4|+2}$

↳ DENOMINADOR DEVE SER DIFERENTE DE ZERO

O MÓDULO DE UM NÚMERO É SEMPRE MAIOR OU IGUAL A ZERO. AO SOMAR 2 A UM NÚMERO QUE JÁ É POSITIVO OU ZERO, O RESULTADO SERÁ NO MÍNIMO 2

DOMÍNIO $D = \mathbb{R}$ (TODOS OS NÚMEROS REAIS)

3.6 INFORMAÇÕES A PARTIR DO GRÁFICO

3

a) O CONJUNTO IMAGEM É FORMADO POR TODOS O VALORES QUE A FUNÇÃO ASSUME NO EIXO VERTICAL (EIXO y)

O PONTO MAIS ALTO ATINGE EXATAMENTE O VALOR 3, A PARTIR DAÍ, AS LINHAS DESCEM INDEFINIDAMENTE PARA BAIXO.
O CONJUNTO IMAGEM DE f É COMPOSTO POR TODOS OS NÚMEROS REAIS MENORES OU IGUAIS A 3.
$\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$

b) OS ZEROS DE f SÃO AS RAÍZES DE x ONDE O GRÁFICO CRUZA O EIXO HORIZONTAL. NESTES PONTOS A ALTURA DA FUNÇÃO É ZERO.

A LINHA VERMELHA CORTA A MALHA EM DOIS PONTOS EXATOS, -1 E 3.
OU SEJA, OS ZEROS DE f SÃO -1 E 3.

7

a) O conjunto imagem refere-se a todos os valores que a função atinge no eixo vertical (y).
A imagem é composta por $[0, +\infty)$

b) O zero de f é $x = 1$

c) Intervalos decrescentes: $(-\infty, 1)$ e $[1, 3]$
Intervalos crescentes: $[-1, 1]$ e $[3, +\infty)$

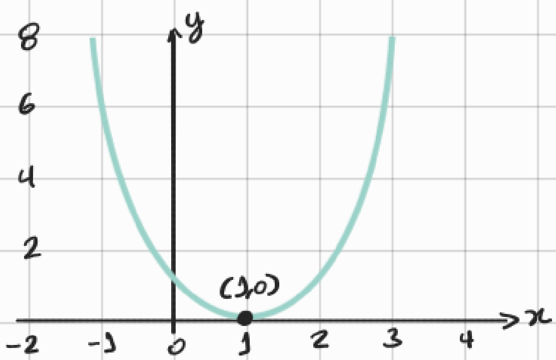
d) Os mínimos locais são os "fundos de vale" do gráfico. Pontos onde a função para de descer e começa a subir.
Máximos local são os opostos.

Mínimo local: $(-1, 0)$ e $(3, 2)$
Máximo local: $(1, 5)$

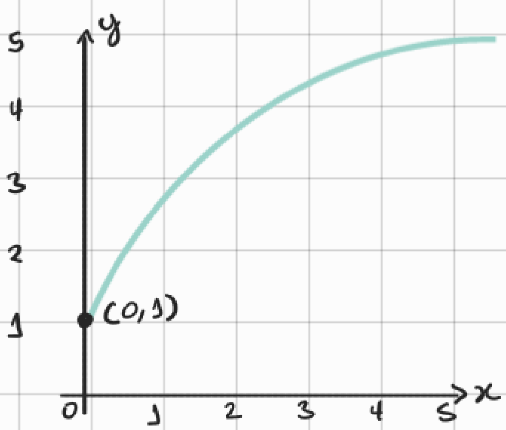
3.7 Funções usuais

1

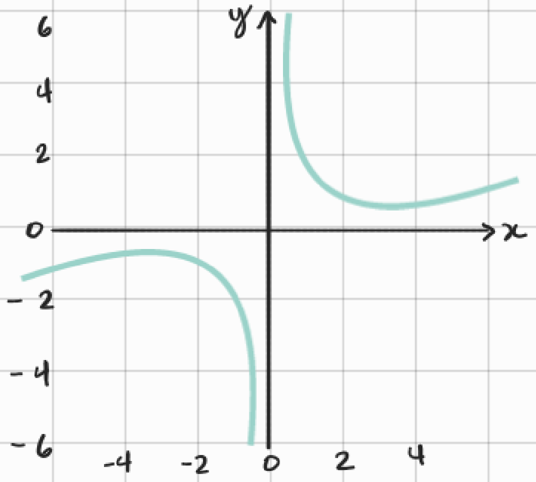
c) $f(x) = (x-1)^2$



d) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$



f) $f(x) = \frac{2}{x}$



7

a) O VOLUME DO SILO AUMENTA A UMA TAXA CONSTANTE, O QUE CARACTERIZA UMA FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU.

$V(t) = at + b$

- b → VOLUME INICIAL
- t → TEMPO
- a → TAXA DE VARIAÇÃO

$V(4) = 60(4) + b \Rightarrow 400 = 240 + b$

$b = 400 - 240$

$b = 160$

OU SEJA, $V(t) = 60t + 160$

b) BASTA IGUALAR A FUNÇÃO $V(t)$ A ESTA CAPACIDADE.

$60t + 160 = 1600$

$60t = 1600 - 160 \Rightarrow 60t = 1440 \Rightarrow t = \frac{1440}{60} \Rightarrow t = 24$

O SILO ESTARÁ CHEIO EM 24 HORAS.

3.8 TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES

(1)

TRANSLAÇÃO VERTICAL (PARA BAIXO)

SUBTRAÍMOS O VALOR DIRETAMENTE DA FUNÇÃO INTEIRA.

POR EXEMPLO, PARA DESCER 3 UNIDADES, FAZEMOS $g(x) = f(x) - 3$

TRANSLAÇÃO HORIZONTAL (PARA DIREITA)

SUBTRAÍMOS O VALOR DIRETAMENTE NA VARIÁVEL x.

POR EXEMPLO, PARA MOVER 5 UNIDADES PARA A DIREITA, FAZEMOS $h(x) = f(x-5)$.

a) $f(x) = 2x - 1$

FUNÇÃO g

$g(x) = f(x) - 3$

$g(x) = (2x-1) - 3$

$g(x) = 2x - 4$

FUNÇÃO h

$h(x) = f(x-5)$

$h(x) = 2(x-5) - 1$

$h(x)\ 2x - 10 - 11 \Rightarrow h(x) = 2x - 11$

b) $f(x) = x^2 - x$

Função g

$g(x) = f(x) - 3$

$g(x) = x^2 - x - 3$

Função h

$h(x) = f(x-5)$

$h(x) = (x-5)^2 - (x-5)$

com o produto notável expandido

$h(x) = (x^2 - 10x + 25) - x + 5$

$h(x) = x^2 - 10x - x + 25 + 5$

$h(x) = x^2 - 11x + 30$

3.9 Combinação e composição de funções

16

a)

Função $f(x)$ (reta cinza)

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-1)}{1-0} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

Função $g(x)$ (reta vermelha)

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-3}{3-0} = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

b)

$w(x) = f(g(x))$

$w(x) = 2(g(x))$

$w(x) = 2(-x+3)-1$

$w(x) = -2x+6-1$

$w(x) = -2x+5$

c) GRÁFICO DE $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ PARA $x \in [0,4]$

$h(x) = (2x-1) \cdot (-x+3)$

$h(x) = -2x^2 + 6x + x - 3$

$h(x) = -2x^2 + 7x - 3$