PROPRIEDADES DOS NÚMEROS REAIS

COMUTATIVA

$a+b=b+a$

$a.b=b.a$

ASSOCIATIVA

$(a+b)+c=a+(c+b)$

$(a.b).c=a.(c.b)$

DISTRIBUTIVA

$a.(b+c)=ab+ac$

ELEMENTO NEUTRO

$a+0=a$

$a.1=a$

ALGORITMO DA DIVISÃO

BASEADO NO TEOREMA DE EUCLIDES:

↳ DIVIDENDO = DIVISOR . QUOCIENTE + RESTO

FRAÇÕES

SOMA E SUBTRAÇÃO

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

MULTIPLICAÇÃO

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

DIVISÃO

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

POTENCIAÇÃO

PRODUTO DE MESMA BASE

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

QUOCIENTE DE MESMA BASE

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

EXPOENTE ZERO

$$x^0 = 1$$

EXPOENTE NEGATIVO

UM EXPOENTE NEGATIVO É UMA ORDEM PARA INVERTER A BASE.

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad e \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

RAÍZES DE NÚMEROS GRANDES

BASTA USAR A DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS.

$\sqrt{1296}$

↳ $1296/2 = 648$
$648/2 = 324$
$324/2 = 162$
$162/2 = 81$
$81/3 = 27$
$27/3 = 9$
$9/3 = 3$
$3/3 = 1$

AGRUPANDO O RESULTADO

$1296 = 2^4 . 3^4$

$\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 . 3^4} = 2^2 . 3^2 = 4.9 = 36$

PROPRIEDADES ESSENCIAIS DAS RAÍZES

RAIZ COMO POTÊNCIA

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

$\sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$ E $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

MÓDULO

$\sqrt{x^2} = |x|$

RACIONALIZAÇÃO

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

PRODUTODOS NOTÁVEIS

QUADRADO DA SOMA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

QUADRADO DA DIFERENCA

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

DIVISÃO DE DECIMAIS POR DECIMAIS

$2,5 \div 0,05 \rightarrow$ SUMIR COM AS VIRGULAS

$2,50 \div 0,05 \rightarrow$ IGUALAR AS CASAS DECIMAIS

$250 \div 5 \rightarrow$ MULTIPLICAR POR 100

$250 \div 5 = 50$

! LÓGICA SIMILAR SE APLICA A FRAÇÕES, COMO SÃO OPERAÇÕES DE DIVISÃO PARALIZADAS, PRECISAMOS TER ALGO EM COMUM, NESTE CASO MMC.

LIMPEZA DE FRAÇÕES

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$$

$$\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} \qquad x-2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{1}$$

$$\frac{\frac{2-x}{2x}}{\frac{x-2}{1}}$$

REGRA DA DIVISÃO, MANTEMOS O DE CIMA E MULTIPLICAMOS PELO INVERSO DA DE BAIXO.

$$\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{2-x}{2x(x-2)}$$

DEFINIÇÃO FORMAL DE MÓDULO

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

POR EXEMPLO

$|-5| \Rightarrow -(-5) \Rightarrow 5$

PROPRIEDADES INEGOCIÁVEIS

1- NÃO NEGATIVIDADE

$|x| > 0$ PARA QUALQUER x REAL

2- MULTIPLICATIVA

MÓDULO DO PRODUTO É O PRODUTO DOS MÓDULOS

$|a.b| = |a|.|b|$

3- DIVISIVA

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$ DESDE QUE $b \neq 0$

4- IDENTIDADE QUADRÁTICA

$|x|^2 = x^2$ e $\sqrt{x^2} = |x|$

5- DESIGUALDADE TRIANGULAR

$|a+b| \leq |a| + |b|$

↳ O MÓDULO DA SOMA É SEMPRE MENOR OU IGUAL A SOMA DOS MÓDULOS

PROPRIEDADES DA IGUALDADE

REFLEXIVA → $a = a$

SIMÉTRICA → SE $a = b$, ENTÃO $b = a$

TRANSITIVA → SE $a = b$ E $b = c$, ENTÃO $a = c$

ADITIVA → SE $a = b$, ENTÃO $a + c = b + c$

MULTIPLICATIVA → SE $a = b$, ENTÃO $a \cdot c = b \cdot c$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

NATURAIS ($\mathbb{N}$)

NÚMEROS INTEIROS NÃO NEGATIVOS

$\sqrt{4}$ É NATURAL

INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

INCLUI TODOS OS NATURAIS E TAMBÉM OS NEGATIVOS

RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

TODOS OS NÚMEROS QUE PODEM SER ESCRITOS NA FORMA DE UMA FRAÇÃO $\frac{a}{b}$ (COM $b \neq 0$)

↳ INCLUI DECIMAIS EXATOS E DÍZIMAS PERIÓDICAS

IRRACIONAIS ($\mathbb{I}$)

SÃO OS NÚMEROS QUE NÃO PODEM SER ESCRITOS COMO UMA FRAÇÃO NÚMEROS COM CASAS INFINITAS OU QUE NÃO POSSUEM UM PADRÃO DE REPETIÇÃO.

↳ $\sqrt{5}$ É IRRACIONAL

REAIS ($\mathbb{R}$)

ENGLOBA TODOS OS NÚMEROS, RACIONAIS E IRRACIONAIS.

PORCENTAGEM

A PORCENTAGEM É NA VERDADE, UMA FRAÇÃO COM DENOMINADOR 100.

EXEMPLO DIRETO

↳ 30% DE 1500

$30\% \Rightarrow \frac{30}{100} \Rightarrow 0{,}30$

$0{,}30(1500) = 450$

OU

8,50% DE 700

$8{,}50\% \Rightarrow \frac{8{,}50}{100} = 0{,}085$

$0{,}085 \cdot 700 = 59{,}50$

OPERAÇÕES BÁSICAS COM PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

$2(x-3) = 4(2x+1)$

APÓS A DISTRIBUTIVA, TEMOS

$2x - 6 = 8x + 4$

$2x - 8x = 4 + 6$

$-6x = 10$

$x = -\frac{10}{6}\ (/2) \Rightarrow -\frac{5}{3}$

EQUAÇÕES E PROPORCIONALIDADES

QUANDO UMA EQUAÇÃO APRESENTA FRAÇÕES, A ESTRATÉGIA MAIS SEGURA É ENCONTRAR O MMC DOS DENOMINADORES ANTES DE CONTINUAR A RESOLUÇÃO.

$\frac{3x}{2} + 2 = 3x - 2$

O MMC DESTA EQUAÇÃO É 2.

MULTIPLICANDO TODA EQUAÇÃO POR 2.

$3x + 4 = 6x - 4\ (+4)$

$8 = 6x - 3x$

$8 = 3x\ (/3)$

$x = \frac{8}{3}$

REGRA DE TRÊS

É NECESSÁRIO DEFINIR SE AS GRANDEZAS SÃO

DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

↳ SE UMA CRESCE, A OUTRA CRESCE NA MESMA PROPORÇÃO.

INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

↳ SE UMA CRESCE, A OUTRA DIMINUI.

POR EXEMPLO, SE A MÃO DE OBRA DE UM DETERMINADO TRABALHO AUMENTA, E O TEMPO DE CONCLUSÃO DIMINUI, TEMOS UMA PROPORCIONAL INVERSA.
NESTE CASO, MULTIPLICAMOS EM LINHA RETA.

MÃO DE OBRA — DIAS

$12 \longrightarrow 10 \Rightarrow 8x = (12)(10)$

$x \longrightarrow 8$ $\quad 8x = 120$

$x = \frac{120}{8} \Rightarrow 15$

PLANO CARTESIANO E ANÁLISE DE FUNÇÕES

PLANO CARTESIANO E INTERSEÇÕES
O PLANO É FORMADO POR DOIS EIXOS:
x (HORIZONTAL, ABSCISSAS)
y (VERTICAL, ORDENADAS)
CADA PONTO É UM PAR ORDENADO (x, y)

PONTO DE EQUILÍBRIO E VANTAGEM

$Ct(x) = 75x + 4000$; $Cc(x) = 12,5x + 3125$

$Ct(x) < Cc(x)$

$7{,}5x + 4000 < 12{,}5x + 3125$

$7{,}5x < 12{,}5x - 875 \ (-12{,}5x)$

$-5x < -875 \ (x -1)$

$5x > 875 \ (/5)$

$x > \frac{875}{5} \Rightarrow 175$

FUNÇÕES QUADRÁTICAS (ax^2+bx+c)

AS FUNÇÕES DO 2° GRAU FORMAM PARÁBOLAS.

O COEFICIENTE a QUE ACOMPANHA x^2 É O CHEFE DA PARÁBOLA.

↳ SE FOR POSITIVO, A CONCAVIDADE ESTÁ VIRADA PARA CIMA.

↳ SE FOR FALSO, A CONCAVIDADE ESTÁ VIRADA PARA BAIXO.

ZEROS DA FUÇÃO

ENCONTRAR RAÍZES É RESPONDER À PERGUNTA:

"QUAIS OS VALORES DE x QUANDO $y=0$?"

POR EXEMPLO

$f(x) = -2x^2 + 9x$

IGUALAMOS A ZERO

$-2x^2 + 9x = 0$

EVIDENCIAR O x

$x(-2x+9) = 0$

↳ JA TEMOS UM ZERO

$-2x+9 = 0 \ (-9)$

$-2x = -9 \ (/-2)$

$x = \frac{-9}{-2} \Rightarrow \frac{9}{2} \Rightarrow 4{,}5$

INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS

COM $f(x) = -2x^2 + 9x$, E $f(x) \geqslant 9$

$-2x^2 + 9x \geqslant 9$

IGUALANDO A ZERO

$-2x^2 + 9x - 9 \geqslant 0$

CALCULAR O ZERO

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 9^2 - 4(-2)(-9)$

$\Delta = 81 - 72 = 9$

APLICANDO BHÁSKARA

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2(-2)} \Rightarrow \frac{-9 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-9+3}{-4} \Rightarrow \frac{-6}{-4} (/2) \Rightarrow \frac{-3}{-2} \Rightarrow 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{-9-3}{-4} \Rightarrow \frac{-12}{-4} (/2) \Rightarrow \frac{-6}{-2} \Rightarrow 3$$

SOLUÇÃO POSSUI INTERVALO FECHADO $[1{,}5;\ 3]$

FUNÇÃO INVERSA, INJETORA E LOGARITMOS

INJETORA, BIJETORA E O TESTE DA LINHA HORIZONTAL

PARA QUE UMA FUNÇÃO POSSA SER "DESFEITA", ELA PRECISA SER ESTRITAMENTE CONTROLADA.

CADA x DEVE TER APENAS UM y, E NENHUM y PODE SER PARTILHADO POR DOIS x DIFERENTES.

! UMA FUNÇÃO ADMITE INVERSA APENAS SE FOR BIJETORA.

TESTE GRÁFICO

TRAÇAMOS UMA LINHA HORIZONTAL NO GRÁFICO. SE A LINHA CORTAR O GRÁFICO EM MAIS DO QUE UM PONTO, A FUNÇÃO NÃO TEM INVERSA.

↳ COMO É O CASO DA PARÁBOLA INTEIRA, QUE SOBE E DESCE CRUZANDO A LINHA DUAS VEZES.

CONDIÇÃO ALGÉBRICA

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

O BÁSICO DOS LOGARITMOS

UM LOGARÍTMO É APENAS UMA FORMA DIFERENTE DE ESCREVER UMA POTÊNCIA. DESTA FORMA, É O EXPOENTE QUE PROCURAMOS.

↳ REGRA FUNDAMENTAL

O LOGARITMO DE UM NÚMERO É O EXPOENTE AO QUAL A BASE DEVE SER ELEVADA PARA PRODUZIR ESSE NÚMERO.

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

EXEMPLOS

$$\log_5(125) = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$$

$$\log_9(81) = 2 \Rightarrow 9^2 = 81$$

INEQUAÇÕES RACIONAIS

UMA INEQUAÇÃO RACIONAL É AQUELA QUE TEM INCÓGNITA NO DENOMINADOR.

$$\frac{x^2+2x+3}{x+15} \leq 1$$

PASSO A PASSO

! NUNCA MULTIPLIQUE CRUZADO. NUMA INEQUAÇÃO, COMO NÃO SABEMOS SE O DENOMINADOR É POSITIVO OU NEGATIVO, MULTIPLICÁ-LO PODE INVERTER O SINAL DA DESIGUALDADE DE FORMA ERRADA.

PRIMEIRO IGUALAMOS A ZERO, PASSANDO O 1 SUBTRAINDO.

$$\frac{x^2+2x+3}{x+15} - 1 \leq 0$$

PARA SUBTRAIR O 1, PRECISAMOS REESCREVÊ-LO COM O MESMO DENOMINADOR DA FRAÇÃO, QUE É $(x+15)$

$$\frac{x^2+2x+3}{x+15} - \frac{1.x+15}{x+15} \leq 0$$

$$\frac{x^2+2x+3-(x+15)}{x+15} \leq 0$$

$$\frac{x^2+x-12}{x+15} \leq 0$$

ENCONTRANDO AS RAIZES

$$x^2+x-12=0$$

POR SOMA E PRODUTO PRECISAMOS DOIS NÚMEROS QUE SOMADOS DEEM -1 E MULTIPLICADOS DEEM 12.

ESTES NÚMEROS SÃO 3 E -4. PORTANTO, $x=3$ E $x=-4$.

$x+15=0 \Rightarrow x=-15$

DETERMINANDO O CONJUNTO SOLUÇÃO

PARA $x<-15$ (EX. -20)

NUMERADOR $\rightarrow (-20)^2+(-20)-12 \Rightarrow 400-32>0$ (+)

DENOMINADOR $\rightarrow -20+15=-5<0$ (−)

FRAÇÃO $\rightarrow (+)/(-)=(-)$

PARA $-15<x<-4$ (EX. -10)

NUMERADOR $\rightarrow (-10)^2+(-10)-12=100-22>0$ (+)

DENOMINADOR $\rightarrow -10+15=5>$ (+)

FRAÇÃO $\rightarrow (+)/(+)=(+)$

PARA $-4<x<3$ (EX. 0)

NUMERADOR $\rightarrow 0^2+0-12<0$ (−)

DENOMINADOR $\rightarrow 0+15>0$ (+)

FRAÇÃO $\rightarrow (-)/(+)=(-)$

PARA $x>3$ (EX. 5)

NUMERADOR $\rightarrow 5^2+5-12 \Rightarrow 30-12>0$ (+)

DENOMINADOR $\rightarrow 5+15=20>0$ (+)

FRAÇÃO $\rightarrow (+)/(+)=(+)$

CONJUNTO SOLUÇÃO

$S=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-15 \text{ ou } -4\leq x\leq 3\}$

SOMA E PRODUTO

↳ BASEADA NAS RELAÇÕES DE GIRARD

TODA EQUAÇÃO TEM UMA FORMA GERAL:

$ax^2+bx+c=0$

SE ESSA EQUAÇÃO POSSUI DUAS RAÍZES REAIS x_1 E x_2, PODEMOS REESCREVÊ-LA EM SUA FORMA FATORADA.

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

EXPANDINDO A FORMA FATORADA

$a(x^2-x_1x-x_2x+x_1 \cdot x_2)=0$

$a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2)=0$

AGORA MULTIPLICANDO TUDO POR a

$ax^2-a(x_1+x_2)x+a(x_1 \cdot x_a)=0$

PARA O TERMO $x \rightarrow -a(x_1+x_2)=b \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ (SOMA)

PARA O TERMO INDEPENDENTE a

↳ $a(x_1 . x_2)=c \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (PRODUTO)

SE $a=1$, AS FÓRMULAS SÃO

SOMA $\rightarrow x_1+x_2=-b$ (AS RAÍZES SOMAM O VALOR DE b COM O SINAL INVERTIDO)

PRODUTO $\rightarrow x_1 \cdot x_2 = c$ (AS RAÍZES MULTIPLICADAS RESULTAM NO VALOR EXATO DE c)

EXEMPLOS

$x^2+x-12=0$

$a = 1$; $b = 1$; $c = -12$

SOMA DOS PRODUTOS DESEJADOS

SOMA $(-b) = -1$

PRODUTO $(c) = -12$

AS RAÍZES SÃO 3 E -4

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$a = 1$; $b = -7$; $c = 10$

SOMA DOS PRODUTOS DESEJADOS

SOMA $(-b) \Rightarrow -(-7) = 7$

PRODUTO $(c) = 10$

AS RAÍZES SÃO 2 E 5

! SE DEMORAR MAIS QUE 15 SEGUNDOS, TENTANDO DESCOBRIR OS NÚMEROS COM SOMA E PRODUTO, USE BHASKARA.

COMPORTAMENTO NAS EXTREMIDADES

NUM POLINÔMIO GIGANTE, O TERMO COM MAIOR EXPOENTE, É O DOMINANTE. QUANDO x ASSUME VALORES, OS OUTROS TERMOS TORNAM-SE IRRELEVANTES.

POR EXEMPLO

$f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 100$

↳ O GRAU 4 É O PRINCIPAL, COM O COEFICIENTE NEGATIVO -3

↳ INDEPENDENTEMENTE DAS VOLTAS NO MEIO DO GRÁFICO, AS DUAS EXTREMIDADES IRÃO APONTAR PARA BAIXO $(-\infty)$.

↳ O TERMO x^2 SERÁ GIGANTE E POSITIVO, MAS MULTIPLICADO POR -3, VAI DESPENCAR PARA INFINITO NEGATIVO.

EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

GRÁFICOS E ASSÍNTOTAS

A FUNÇÃO $f(x) = b^x$ TEM DOIS COMPORTAMENTOS COMPLETAMENTE DIFERENTES DEPENDENDO DA BASE b.

CRESCIMENTO EXPONENCIAL ($b > 1$)

$f(x) = 2^x$, APÓS PERMANECER ALGUNS MOMENTOS COLADO AO EIXO x, AO CRUZAR O EIXO y ELA EXPLODE RAPIDAMENTE PARA CIMA.

DECAIMENTO EXPONENCIAL ($0 < b < 1$)

$f(x) = (1/2)^x$, A PROCESSO É O INVERSO. COMEÇA GIGANTE NO LADO ESQUERDO E VAI REDUZINDO E ENCOSTANDO NO EIXO x PELO LADO DIREITO.

ASSÍNTOTA

↳ CURVAS QUE CHEGAM MUITO PERTO DO EIXO HORIZONTAL $y = 0$, MAS NUNCA TOCAM. ESTA LINHA QUE ATRAI O GRÁFICO MAS NUNCA É TOCADA CHAMA-SE ASSÍNTOTA HORIZONTAL.

PONTOS MÁXIMOS E MÍNIMOS EM PARÁBOLAS

NAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS ($f(x) = ax^2 + bx + c$), O GRÁFICO É UMA PARÁBOLA. ESTA CURVA TEM SEMPRE APENAS UM ÚNICO PONTO DE VIRAGEM, CONHECIDO COMO VÉRTICE.

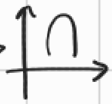
Ponto mínimo

↳ Se a for positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima. O vértice é o ponto mais baixo do gráfico.

↳ 

Ponto máximo

↳ Se a for negativo ($a < 0$), a parábola tem a concavidade voltada para baixo. O vértice é o ponto mais alto.

↳ 

$x_v = \dfrac{-b}{2a}$ → onde e quando ocorre o máximo/mínimo

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$ → qual é o valor do máximo/mínimo

Exemplo

Se uma equação descreve o lucro de uma empresa, o x_v diz-lhe "quantos produtos deve vender para maximizar o lucro" o y_v diz-lhe "quanto será esse lucro máximo".